

物体力を考慮した境界要素法による二次元弾性問題の解法について

岩手大学工学部 学生員 ○佐々木 一孝

岩手大学工学部 正会員 宮 本 裕

岩手大学工学部 正会員 岩 崎 正二

I. まえがき

近年、積分方程式と有限要素法(F.E.M)で行なわれる離散化法を組み合わせに境界要素法(Boundary Element Method, 以下B.E.Mと略す)と呼ばれる解析方法が、マイコンの発達とともに工学的問題に適用されはじめている。そこで、本報告においては、すでに文献(4)で述べている要素関数 u, p が線形であるとした場合の解析方法をもとに、より汎用性のあるものにするために工学上しばしば重要となる重力(自重)、遠心力および定常熱応力などの物体力を考慮した場合の解析方法について述べ、その解析結果とF.E.Mを用いた汎用構造解析プログラムのひとつであるISAP-6(複合構造解析システム)で得られた結果との比較検討を行なうことを目的としている。

II. 物体力を考慮した場合の境界要素法の基礎概念

二次元弾性問題におけるB.E.Mの基礎関係式は次式で示される。

$$C^i u_{\ell}^i + \int_{\Gamma} u_k P_{\ell k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k u_{\ell k}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{\ell k}^* d\Omega \quad (k=1, 2 \quad \ell=1, 2) \quad (1)$$

ここで、 u_k, P_k および b_k は、それぞれ k 方向の変位、応力度および物体力。 u_{ℓ}^i は点 i における ℓ 方向の変位。 C^i は点 i における境界の形状を示す係数である。また $u_{\ell k}^*, P_{\ell k}^*$ はそれぞれ ℓ 方向に作用する単位力により生じた k 方向の変位と応力ベクトルである。これは基本解と呼ばれるもので次式で示される。

$$u_{\ell k}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Delta_{\ell k} + \frac{\partial r}{\partial x_{\ell}} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \quad (2)$$

$$P_{\ell k}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{\ell k} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_{\ell}} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_{\ell}} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_{\ell} \right) \right\} \quad (3)$$

ただし、 n は物体表面の法線、 n_i は方向余弦、 $\Delta_{\ell k}$ はKroneckerのデルタ、 r は負荷点と考慮点との距離、 ν はポアソン比、 G はせん断弾性係数である。

ここで、式(1)をマトリックスを用いて表わすと式(4)になる。ただし、 $\{u^*\}$ は $u_{\ell k}^*$ を成分としてもつ (2×2) のマトリックス、 $\{P^*\}$ も同様である。

$$[C^i] \{u^i\} + \int_{\Gamma} \{P^*\} \{u\} d\Gamma = \int_{\Gamma} \{u^*\} \{P\} d\Gamma + \int_{\Omega} \{u^*\} \{b\} d\Omega \quad (4)$$

さらに、 $\{u\}$ と $\{P\}$ は線形要素を仮定した場合、 $\{u\} = [\Phi]^T \{u_i\}$ 、 $\{P\} = [\Phi]^T \{P_i\}$ と表わされる。なお、 $[\Phi]^T$ は内そう関数と呼ばれるもので、一定要素の場合には不用である。そこで、以上の点を考慮して式(4)を n 個の線形要素について考えると次式のようになる。

$$[C^i] \{u^i\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} \{P^*\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{u_j\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma_j} \{u^*\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{P_j\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega_s} \{u^*\} \{b\} d\Omega \right\} \quad (5)$$

式(5)にGaussの数値積分公式を用いて展開すると式(6)となる。なお、実際の数値積分では境界において、Gaussの4点積分公式、内部領域においてはGaussの三角形要素における5次7点積分公式を用いた。

$$[C^i] \{u^i\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^8 |G_k| \omega_k ([P^*][\Phi]^T)_k \right\} \{u_j\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^8 |G_k| \omega_k ([u^*][\Phi]^T)_k \right\} \{P_j\}$$

$$+ \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{t=1}^n |J|_s \omega_t ([u^*] \{b\})_t \right\} \quad (6)$$

ここで、 $|G|_i$ は $\sqrt{q_i}/2$ 、 l_i は要素 Ω_i の長さ、 $|J|_s$ は要素 Ω_s の面積である。また m は領域 Ω を三角要素に分割した際の分割数、 q および n は積分点の個数、 ω_k 、 ω_t は積分点での重み、 $([P^*][\Phi]^T)_k$ 、 $([u^*][\Phi]^T)_k$ および $([u^*]\{b\})_t$ は積分点におけるそれぞれの関数の値である。

さらに、式(6)はある特定な点 i (考慮点) と、その他の要素 Ω との関係式であるので、式(6)を全ての節点 i について考えると結局 n 個の方程式が得られる。よって、式(6)は次式のように表わされる。

$${}^{2n}[H]\{u\} = {}^{2n}[G]\{P\} + \{B\} \quad (7)$$

Ⅲ. 数値計算例

1. 一様な棒が下方に等分布荷重を受ける場合

Fig Ⅲ-1 のようなモデルを考え、ISAP-6 (複合構造解析システム) と比較する。

(諸条件)

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2, \quad G = 8.0769 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\nu (\text{単位体積重量}) = 0.00785 \text{ Kg/cm}^3, \quad \nu = 0.23077$$

$$L = 150 \text{ cm}, \quad B = 60 \text{ cm}$$

2. 擁壁が集中荷重を受ける場合

Fig Ⅲ-2 のような擁壁が側面に集中荷重を受ける場合に本手法を適用

し、ISAP-6 と比較する。なお諸条件は一様な棒の場合と同様とする。

Ⅳ. 結果

以上の数値計算例の結果を下表に示す。なお、数値計算に際しては東北大学大型計算機 (ACOS 1000) を使用した。

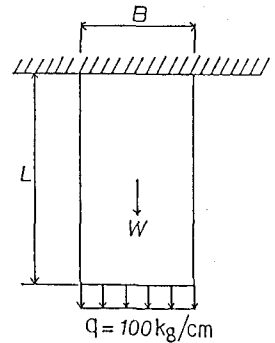


Fig Ⅲ-1 STICK

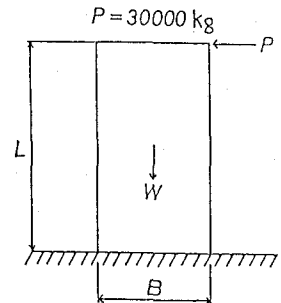


Fig Ⅲ-2
RETAINING WALL

	比較点		ISAP-6	B.E.M	
				constant ele.	linegr ele.
	1	X-変位	-0.7106×10^{-2}	-0.7148×10^{-2}	-0.7147×10^{-2}
		Y-変位	—	—	—
	2	X-変位	-0.4272×10^{-2}	-0.4290×10^{-2}	-0.4282×10^{-2}
		Y-変位	0.3844×10^{-3}	0.4403×10^{-3}	0.4332×10^{-3}
	3	stress σ_{xx}	-0.13143	-0.59366	-0.29542
		σ_{yy}	0.1012×10^{-3}	0.9943×10^{-2}	0.1007×10^{-3}
	1	X-変位	-0.74661	-0.73865	-0.74456
		Y-変位	0.20534	0.21084	0.21513
	2	X-変位	-0.17508	-0.16315	-0.16363
		Y-変位	-0.12058	-0.08900	-0.11864
	3	stress σ_{xx}	0.2719×10^2	—	0.1741×10^2
		σ_{yy}	—	—	—

(単位: 変位 cm, 応力 Kg/cm^2)

参考文献

- 1) C.A. フレビア; 境界要素法入門, 培風館 (1982)
- 2) C.A. フレビア; 境界要素法の応用・2, 企画センター (1983)
- 3) 榎園正人; マイコンによる境界要素解析, 培風館 (1984)
- 4) 佐々木一孝・宮本裕・岩崎正二; 境界要素法による2次元弾性問題の解法, 岩手大学工学部研究報告 第37巻 (1984)