

岩手大学工学部 学生員 ○秋庭 司
 岩手大学工学部 正会員 岩崎 正二
 岩手大学工学部 正会員 宮本 裕

1. まえがき

衝撃荷重を受ける構造物の動的応答問題は、工学上重要な問題で古くから研究がなされている。最近では、道路を落石から保護するために作られるロックシェッドの落石衝撃力を求める問題、原子力施設、電力施設における事故時に発生する内外飛来物体に対する耐衝撃性の問題など土木の分野でも衝撃荷重に対する安全性の検討が行われるようになってきた。本報告では、任意の平面骨組構造物を対象として衝撃解析を行えるよう有限要素法を適用し、一例として減衰バネ-質量系モデルの衝突により構造物がどのような初期挙動を示すかを明らかにしようとしたものである。

2. 解析理論

図-Iのような平面骨組構造物の任意点に減衰バネ-質量系モデルが初速度 v_0 で衝突する問題を考える。ただし、減衰バネモデルとしては、マックスウェル体モデルを用いる。ノーマル・モード法により衝撃点での変位を誘導する。ベルヌーイ・オイラー梁要素を重ね合わせて衝撃力 $\{Q(t)\}$ を受ける平面骨組構造全体の運動方程式を組み立てると次式で表わされる。

$$(M)\{\ddot{w}\} + (K)\{\dot{w}\} = \{Q(t)\} \quad \text{①}$$

ここで、 (M) :質量マトリックス(n 行 n 列)、 (K) :剛性マトリックス(n 行 n 列)

$\{w\}$:節点変位ベクトル、またドットは時間に関する微分を表わす。

式①の解を固有ベクトルからなるマトリックス (V) と一般化座標 $\{z\}$ で表わすと次式ようになる。

$$\{w\} = (V)\{z\} \quad \text{②}$$

式②を式①に代入し、 $(V)^T$ を左側から乗じると、直交関係より n 個の非連成運動方程式が得られる。

$$M_r^* \ddot{z}_r + K_r^* \dot{z}_r = P_r^*(t) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad \text{③}$$

ここで、 $M_r^* = \{V_r\}^T (M) \{V_r\}$ 、 $K_r^* = \{V_r\}^T (K) \{V_r\}$ 、 $P_r^* = \{V_r\}^T \{Q(t)\}$ 、 $\{V_r\}$ はマトリックス (V) の r 番目の固有ベクトルを表わす。今、 j 点に衝撃力 $P(t)$ が部材に垂直に作用する場合、 $z_r(0) = \dot{z}_r(0) = 0$ の初期条件で式③を解くと下式ようになる。

$$z_r(t) = \frac{1}{M_r^* n_r} \int_0^t V_{jr} P(\tau) \sin n_r(t - \tau) d\tau \quad \text{④}$$

ただし、 $n_r = \sqrt{K_r^* / M_r^*}$ は固有値を表わし、 V_{jr} はマトリックス (V) の j 行 r 列要素を表わしている。従って、式②における S 番目の点の変位は次式ようになる。

$$w_s(t) = \sum_{r=1}^n \frac{V_{sr}}{M_r^* n_r} \int_0^t V_{jr} P(\tau) \sin n_r(t - \tau) d\tau \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad \text{⑤}$$

衝撃点での変位 w_j は、

$$w_j(t) = \sum_{r=1}^n \frac{V_{jr}^2}{M_r^* n_r} \int_0^t P(\tau) \sin n_r(t - \tau) d\tau \quad \text{⑥}$$

次に、質量の重心の変位を w_m とすると、質量の運動方程式は、

$$M \ddot{w}_m(t) = -P(t) \quad \text{⑦}$$

式⑦を $w_m(0) = 0$ 、 $\dot{w}_m(0) = v_0$ の初期条件のもとで解くと、

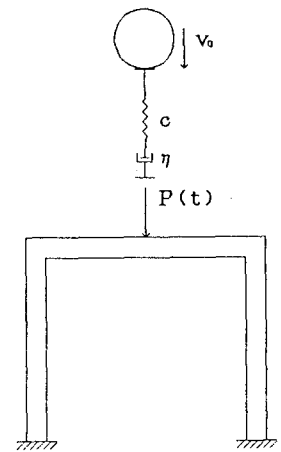


図-I

$$w_n(t) = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau \quad \text{-----} \quad \textcircled{8}$$

一方、マックスウェル体の変位 $w_n(t)$ と $P(t)$ の関係は、

$$w_n(t) = \frac{1}{c} P(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t P(\tau) d\tau \quad \text{-----} \quad \textcircled{9}$$

ここで、 c はバネ係数、 η は粘性係数を表わす。

また、マックスウェル体モデルの変位 w_n は質量の変位 w_m と衝撃点における構造物の変位 w_s との差に等しいから、

$$w_n(t) = w_m(t) - w_s(t) \quad \text{-----} \quad \textcircled{10}$$

式⑧、⑨、⑩を式⑩に代入すると、減衰バネ-質量系が衝突した場合に発生する衝撃力 P を定める第2種ボルテラ型の積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{c} P(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t P(\tau) d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau + \sum_{r=1}^n \frac{V_r^2}{M_r^2 n_r} \int_0^t P(\tau) \sin n_r(t-\tau) d\tau = v_0 t \quad \text{-----} \quad \textcircled{11}$$

次に、簡略理論として減衰バネ-質量系が平面に衝突する場合を考え、このときは、式⑪の左辺第4項を省略した式をラプラス変換を使って解くと次式ようになる。

$$P(t) = \begin{cases} \frac{V_0 c}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} e^{bt} \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t & (\omega^2 > b^2) \\ V_0 c t e^{bt} & (\omega^2 = b^2) \\ \frac{V_0 c}{\sqrt{b^2 - \omega^2}} e^{bt} \sinh \sqrt{b^2 - \omega^2} t & (\omega^2 < b^2) \end{cases} \quad \text{-----} \quad \textcircled{12}$$

ここで、 $\omega^2 = c/M$ 、 $b = c/2\eta$ である。

通常は式⑫の第1式を使用する。ただし、衝撃力 $P(t)$ が負になったところで衝撃は終わったものとし、 $P(t) = 0$ において得られた時間 t を衝撃の終了時間とする。また、 $P(t)$ の式を時間に関して1回微分して得られる式を0において解くと最大衝撃力を与える時間を知ることができる。

3. 数値計算例

数値計算例はコンクリート単純支持梁の中央に減衰バネ-質量系が自然落下する問題を取扱った。なお計算にあたっては以下のような数値を用いた。

衝撃速度 : $v_0 = 626.099$ (cm/sec)
 [落下高さ : $H = 200$ (cm)]
 桁の長さ : $L = 200$ (cm)
 物体の質量 : $M = 0.0002684$ (kg·s²/cm)
 梁のヤング率 : $E = 1.4 \times 10^5$ (kg/cm²)
 バネ係数 : $c = 2000$ (kg/cm)
 粘性係数 : $\eta = \infty, 10, 2, 1$ (kg·s/cm)

桁の分割数は48分割とし、数値積分に際しての時間の刻みは2 μ secとした。図-Ⅱは単純支持梁の衝撃点での衝撃力の時間的な変化を、粘性係数をパラメータとして表わしたものである。

参考文献

- 1) 青柳史郎、構造物における衝撃現象の数値解析、土木学会論文報告集第206号、1972年10月
- 2) 岩崎正二、能町純雄、剛球により衝撃されたラーメン構造物の動的応答解析について、第39回土木学会全国大会年次学術講演会講演概要集、1984年10月

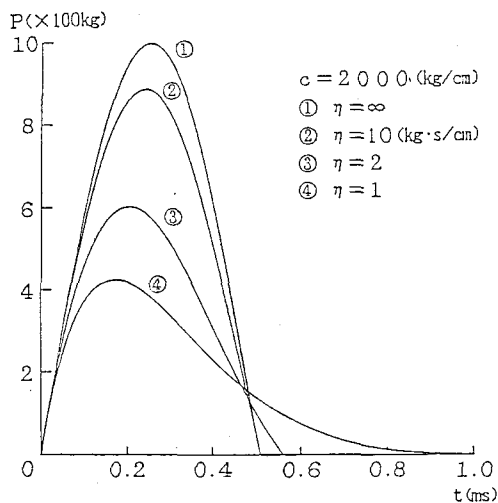


図-Ⅱ