

回転慣性とせん断変形まで考慮した振動数に関する一考察

1 戸工業大学 正員 稲山 和男

1. はじめに

横振動の固有値は、曲げ変形だけを考える場合には細長比に無関係に定まる。しかし、回転慣性とせん断変形まで考える場合には細長比を与えなければ定まらない。同一部材長、同一細長比の場合に前者の振動数と後者のそれとの比較方法を、更にその方法に基づき解析と計算例を示す。

2. 振動数の比較方法について

固有関数が定まれば、種々の境界条件に対して固有値を求め得る。ここでは等断面の場合の固有関数を例にとり、議論を進める。曲げ変形だけを考えた場合には添字 b を、回転慣性とせん断変形まで考える場合には添字 a を付けることにする。

曲げ変形だけを考えた場合の固有関数は

$$Y_b = C_1 \sin \beta_b z + C_2 \cos \beta_b z + C_3 \sinh \beta_b z + C_4 \cosh \beta_b z \quad (1)$$

ここで

$$\beta_b^4 = \rho A \omega_b^2 / EI \quad (2)$$

Y_b : 曲げ変形によるため、 z : 軸方向座標、 ρ : 材料の密度、 E : ヤング率、 A : 断面積、 I : 断面二次モーメント、 β_b : 曲げ変形だけを考えた場合の円振動数、 $C_1 \sim C_4$: 定数

回転慣性とせん断変形まで考えた場合の固有関数は

1) $\alpha(\delta l/H)^4 - 1 < 0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} Y_a &= D_1 \sin \alpha z + D_2 \cos \alpha z + D_3 \sinh \alpha z + D_4 \cosh \alpha z \\ \Theta &= D_1 f \cos \alpha z - D_2 f \sin \alpha z + D_3 g \cosh \alpha z + D_4 g \sinh \alpha z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで

$$\beta_a^4 = \rho A \beta_b^2 / EI \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \delta \sqrt{\{(4+H)(\delta l/H)^2 + \sqrt{(4+H)^2(\delta l/H)^4 + 4}\}}/2 \\ \beta &= \delta \sqrt{\{-(4+H)(\delta l/H)^2 + \sqrt{(4+H)^2(\delta l/H)^4 + 4}\}}/2 \\ f &= \alpha - \alpha \delta^2 (\delta l/H) / \ell, \quad g = \beta + \alpha \delta^2 (\delta l/H)^3 / \beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2) $\alpha(\delta l/H)^4 - 1 > 0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} Y_a &= D_1 \sin \alpha z + D_2 \cos \alpha z + D_3 \sinh \beta z + D_4 \cosh \beta z \\ \Theta &= D_1 f \cos \alpha z - D_2 f \sin \alpha z + D_3 g' \cosh \beta z - D_4 g' \sinh \beta z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \delta \sqrt{\{(4+H)(\delta l/H)^2 - \sqrt{(4+H)^2(\delta l/H)^4 + 4}\}}/2 \\ g' &= \beta' - \alpha \delta^2 (\delta l/H)^3 / \beta' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Y_a : せん断変形を含むため、 Θ : $\frac{dY_b}{dz}$, Y_b : 曲げ変形によるため、 $\delta = E/RG$, R : 断面形状に依存する係数、 G : せん断弾性係数、 ℓ : 部材長、 $H = \ell/R$, $R = \sqrt{I/A}$, β_b : 回転慣性とせん断変形まで考えた場合の円振動数、 $D_1 \sim D_4$: 定数

従って、固有関数(1)式より定まる振動数方程式 F_b は $\beta_b \ell$ だけの関数となり、(3)式または(6)式より定まる振動数方程式 F_a は $\beta_a \ell$ と H との関数となる。即ち

$$F_b(\beta_b \ell) = 0 \quad (8)$$

$$F_a(\beta_a \ell, H) = 0 \quad (9)$$

同一部材長 ℓ 、同一細長比 H で β_a と β_b を比較するため、次の関係式を利用する。

$$\beta_a^4 = \beta_b^2 \ell^2 H^2 / C_0 \quad (C_0 = \sqrt{E/\rho}) \quad (10)$$

$$\therefore \beta_a \ell / C_0 = (\beta_b \ell) / H \quad (11)$$

曲げ変形だけを考えた場合には、(8)式より H に無関係に $\beta_b \ell$ が定まるが、(11)式により各細長比 H に対して $\beta_a \ell / C_0$ が計算できる。回転慣性とせん断変形まで考えた場合には、(9)式より各細長比 H ごとに $\beta_a \ell$ が定まり、更に(11)式より各細長比 H に対して $\beta_b \ell / C_0$ が計算できる。各細長比 H ごとに $\beta_a \ell / C_0$ と $\beta_b \ell / C_0$ との比を求めれば、 β_a / β_b が定まる。即ち、振動数の比が定まる。

3. 解析と計算例

表1~2に解析結果の計算例を、それらに基づいた P_2/P_0 および $\frac{P_2-P_0}{P_0} \times 100$ を図1~4に示す。

表1~2の P_0 と P_2 とは、それぞれ P_0/c_0 と P_2/c_0 とである。

$\frac{H}{L}$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1 P_0	0.09870	0.1974	0.2961	0.3948	0.4935
1 P_2	0.09850	0.1958	0.2908	0.3827	0.4705
2 P_0	0.3948	0.7896	1.1844	1.5791	1.9739
2 P_2	0.3916	0.7653	1.1078	1.4922	1.6774
3 P_0	0.8883	1.7765	2.6648	3.5531	4.4413
3 P_2	0.8725	1.6617	2.3244	2.8586	3.2821
4 P_0	1.5791	3.1582	4.7374	6.3165	7.8957
4 P_2	1.5307	2.8244	3.8114	4.5368	5.0687
5 P_0	2.4674	4.9348	7.4022	9.8696	12.3370
5 P_2	2.3526	4.1935	5.4702	6.3359	6.9322

表1 単純梁の $\frac{H}{L}$ に対する P_0/c_0 と P_2/c_0

$\frac{H}{L}$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1 P_0	0.03576	0.07032	0.1055	0.1406	0.1758
1 P_2	0.03513	0.07005	0.1046	0.1385	0.1718
2 P_0	0.2203	0.4407	0.6610	0.8814	1.1017
2 P_2	0.2189	0.4294	0.6247	0.8006	0.9551
3 P_0	0.6170	1.2339	1.8509	2.4679	3.0849
3 P_2	0.6074	1.1630	1.665	2.2244	2.7300
4 P_0	1.2090	2.4180	3.6271	4.8361	6.0451
4 P_2	1.1752	2.1805	2.9560	3.5976	3.9448
5 P_0	1.9986	3.9972	5.9958	7.9944	9.9930
5 P_2	1.9118	3.4258	4.4832	5.1987	5.6869

表2 片持梁の $\frac{H}{L}$ に対する P_0/c_0 と P_2/c_0

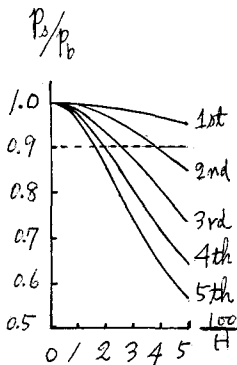


図1 単純梁の $\frac{100}{H}$ に対する P_2/P_0 のグラフ

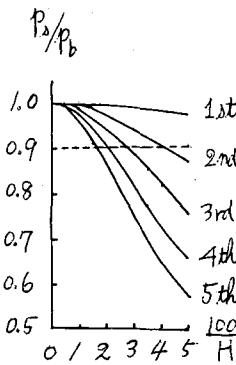


図2 片持梁の $\frac{100}{H}$ に対する P_2/P_0 のグラフ

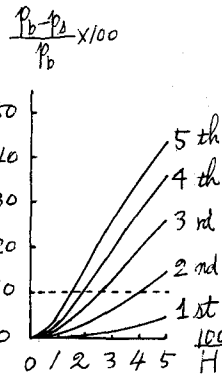


図3 単純梁の $\frac{100}{H}$ に対する $\frac{P_2-P_0}{P_0} \times 100$ のグラフ

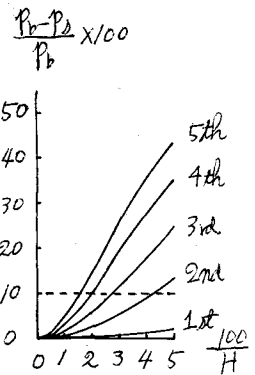


図4 片持梁の $\frac{100}{H}$ に対する $\frac{P_2-P_0}{P_0} \times 100$ のグラフ

4. おわりに

図1, 2の点線より上振動数の違いが1割以内である。図3, 4の点線の下も10%以内である。

1は、差がほとんどみられないことがわかる。高次になるほど、細長さが小さくなるほど、振動数が1割の差を生じ易くなる。図1, 2にある曲線を近似曲線で表現しており、曲線変形法より求めた振動数より直ちに回転慣性とせん断変形を考慮した振動数 $\omega_n = k(H) \cdot P_0/\omega_n$ ($k(H)$: 近似曲線)を求めることができる。

参考文献 1) 藤山 和男: 昭和58年度東北支部技術講演発表会講演概要