

1. はじめに

本手法は、形状最適化の試行過程において、節点座標の変更による応力の変化率を直接、数値微分によって求め、これにより、従来、板厚変化あるいは要素面積の相似形による拡大・縮小等の方法によって求めた解に比べ、より正確な形状最適化を目指すものである。

2. 最適化手法について

今、有限要素解析により各要素の応力 $\{\sigma_j\}$ は、

$$\{\sigma_j\} = [D][B]\{d\} \quad (1)$$

ここで $[D]$: 応力ひずみマトリックス

$[B]$: 変位ひずみマトリックス

$\{d\}$: 変位ベクトル

と表わされている。先回目的試行によって得られる応力を σ_j^k と表わすと

$$\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \quad (2)$$

ここで n : 移動可能節点座標数

x_i : 節点座標

Δx_i : 節点座標の移動量

となり、この σ_j^{k+1} が基準応力 σ_0 となるためには式(2)の左辺を σ_0 とおいて

$$\sigma_0 = \sigma_j^k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \quad (3)$$

とするよう Δx_i を求めればよいことになる。このため x_i として要素総数 m と同じ数だけの移動可能座標を選ぶと、式(3)から式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_0 - \sigma_1^k \\ \sigma_0 - \sigma_2^k \\ \vdots \\ \sigma_0 - \sigma_m^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_1^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1^k}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \sigma_2^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_2^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_2^k}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_m^k}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_m^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_m^k}{\partial x_m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{これを } \{\sigma_0 - \sigma_j^k\} = \left[\frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i} \right] \{\Delta x_i\} \quad (5)$$

とすると、各節点座標の改訂量 Δx_i が次式によって計算される。

$$\{\Delta x_i\} = \left[\frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i} \right]^{-1} \{\sigma_0 - \sigma_j^k\} \quad (6)$$

1) $\frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i}$ の計算

$\frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i}$ は座標の変更による応力の変化率であるから、

(1) から直接、数値微分によって求めることが可能であるが、この方法によれば、移動可能座標数 n 個の構造

解析を必要とし、多大の計算時間を要する。このため、本法では次のように求めている。

(1) から $[D]$ は x_i と無関係なので

$$\frac{\partial \{\sigma_j\}}{\partial x_i} = [D] \frac{\partial [B]}{\partial x_i} \{d\} + [D][B] \frac{\partial \{d\}}{\partial x_i} \quad (7)$$

となり、一方全体剛性方程式

$$[K]\{d\} = \{P\}$$

ここで $[K]$: 剛性マトリックス

$\{P\}$: 荷重ベクトル

の両辺を x_i で微分すると $\{P\}$ は x_i と無関係であるから

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{d\} + [K] \frac{\partial \{d\}}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \{d\}}{\partial x_i} = -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{d\} \quad (8)$$

となる。これを(7)へ代入すると結局

$$\frac{\partial \{\sigma_j\}}{\partial x_i} = [D] \frac{\partial [B]}{\partial x_i} \{d\} - [D][B][K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial x_i} \{d\} \quad (9)$$

が得られる。(9)式における微分項は次式により数値微分にて求めた。

$$\frac{\partial [B]}{\partial x_i} \doteq \frac{1}{\Delta h} \{ [B]_{x_i + \Delta h} - [B]_{x_i} \} \quad (10)$$

$$\frac{\partial [K]}{\partial x_i} \doteq \frac{1}{\Delta h} \{ [K]_{x_i + \Delta h} - [K]_{x_i} \} \quad (11)$$

この方法によると、先に述べたように、移動可能座標を $x_i + \Delta h$ とした時の $[B]$ 、 $[K]$ を求めるだけで、他のマトリックスは先回目に構造解析した際の値を使用することによって $\frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i}$ が計算される。

2) 基準応力

要素の状態を示す基準応力としては Von Mises の相当応力等、各種の材料に適用可能な σ_0 を求める値を使用することが出来る。ここでは各要素の主応力の絶対値の大きい値を用いることとし、この基準応力 σ_0 が連続体全体に均一化されることを考えた。このため(6)式で使われる $\frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i}$ は(9)式から求める $\frac{\partial \{\sigma_j\}}{\partial x_i}$ から

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_j^k}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_i} \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_i} \right) + 2 \tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x_i} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

として計算した。

3) 改訂移動量の制限

(6)式から求まる $\{\Delta x_i\}$ は σ_i と σ_i^k が大きく異なる場合等、大まか改訂を要求し、次の試行では一部の要素面積が負となる不合理が発生する。このため、節点移動に移動制限(more limit)を設け、各要素面積が負としないよう計算した。したがって実際の改訂は式式で行われる。

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \varepsilon \Delta x_i \quad (0 < \varepsilon \leq 1) \quad (13)$$

4) 計算の流れ

本手法の全体フローチャートおよび形状改訂サブルーチンのフローチャートを図1に示す。

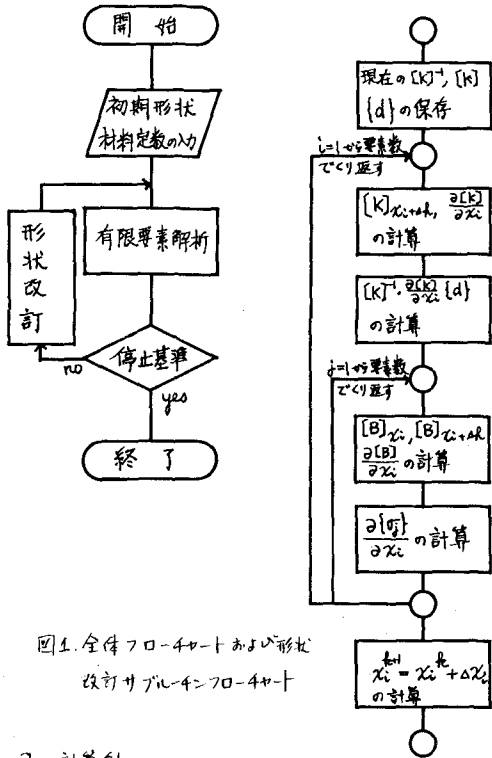


図1. 全体フローチャートおよび形状改訂サブルーチンフローチャート

3. 計算例

本計算手法の確認するため、ごく簡単なモデルについて計算した。次の2,3の例を示す。

図2は要素数2の場合の例で、要素数と等しい移動可能座標として、 x_2, y_2 を選んだ。この計算はおよそ6回の試行で収束し、 x の程度の応力の改善状況は図4に示すものとした。

また、図3は3要素モデルの例で、移動可能座標として、 x_1, y_1 、および支持点のY座標 y_2 の3つを選んだ。この場合の形状改訂はおよそ4回で収束し、図5

のような応力改善が行われている。

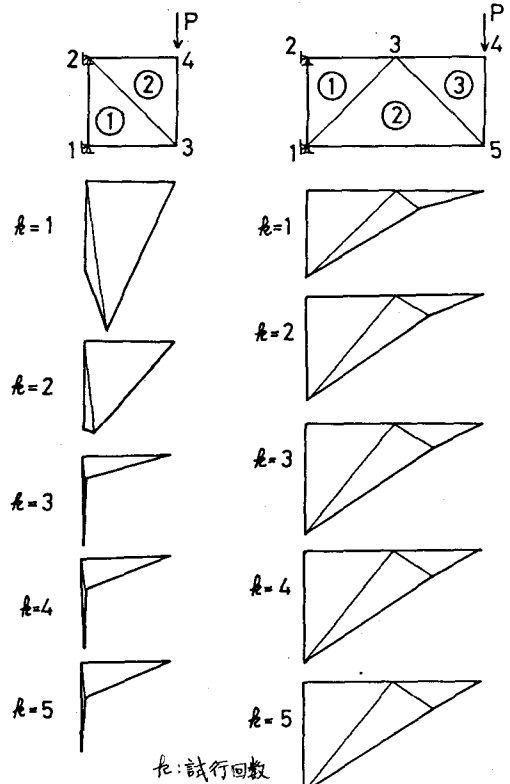


図2. モデル1の形状改訂過程

図3. モデル2の形状改訂過程

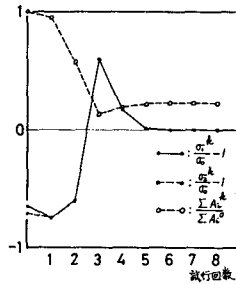


図4. モデル1の応力改善状況

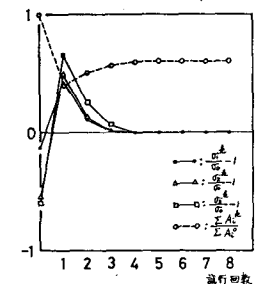


図5. モデル2の応力改善状況

4. おわりに

このように本法によれば、ごく簡単なモデルの形状改訂は比較的短い試行回数で収束し最適形状を得た。しかし、1) 制約条件と一致する移動可能節点の選定、2) 要素数の多い場合、要素面積を0にするような改善の深い試行での処理、3) 試行中の要素形状の平均化等の問題がある。今後、これらを解決し、さらに研究を進めたいと考えている。

<参考文献>

1) Uri Kirsch, 最適構造設計—概念・方法・応用, 丸善