

単純せん断試験における式 $\tau/\sigma_N = R \tan \psi$ に関する考察

東北大学大学院○学生員 森永 慶
 東北大学工学部 正員 佐武 正雄
 同上 正員 新岡 茂

1. まえがき

粒状体における典型的試験方法の一つである単純せん断試験¹⁾に關し、小田と小西は、Cole等のケンブリッジ型単純せん断試験のデータ及び光弾性実験の結果を参照し、図-1に示すようにせん断応力を τ 、垂直応力を σ_N 、この σ_N の作用方向と最大主応力 σ_1 の成す角を ψ とすれば、関係式 $\tau/\sigma_N = R \tan \psi$ (R : 材料定数) が成立することを示した。また落合は、この関係式を用いて単純せん断試験におけるMohrの応力円を作図する方法や粒子間摩擦角 ϕ_u と限界状態における内部摩擦角 ϕ_v との関係なども示している。本文は、小田・小西の式と応力テンソルと歪増分テンソルの共軸性を用いてストレス~ダイレイタンス式を誘導し、実験データと比較し考察すると共に小田・小西の式の適用性について検討を行なったものである。

2. 関係式 $\tau/\sigma_N = R \tan \psi$ について ¹⁾ 小田・小西は、²⁾ 小田による粒子間力の分布則及び実験結果に基づき仮定を用い微視的観点から図-1に示す単純せん断試験に關し、

$$\tau/\sigma_N = R \cdot \tan \psi \quad (2.1)$$

を導いた。さらに落合^{3),4)}は、限界状態における内部摩擦角を ϕ_v とすれば、

$$R = \sin \phi_{cv} \quad (2.2)$$

と記されることを示した。一方、図-2に示すMohrの応力円から応力テンソルの成分の座標変換式

$$\sigma_N = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\psi \quad (2.3)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\psi \quad (2.4)$$

を用いることによつて、式(2.1)と形式の対応する次式を導くことができる。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{2 \cos^2 \psi}{\operatorname{cosec} \psi + \cos 2\psi} \tan \psi \quad (2.5)$$

$$\text{ただし、} \sin \psi = (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.6)$$

式(2.1)と式(2.5)を比較すれば、

$$R = \frac{2 \cos^2 \psi}{\operatorname{cosec} \psi + \cos 2\psi} \tan \psi \quad (2.7)$$

となる。また、砂のせん断試験では伸縮のない方向が常に存在し、主歪増分を $d\epsilon_1$ 、 $d\epsilon_2$ 、 $d\epsilon_1$ の方向と伸び歪ゼロの方向のなす角を ξ とすれば図-3のMohrの歪増分円より、

$$\cos \xi = (d\epsilon_1 + d\epsilon_2) / (d\epsilon_1 - d\epsilon_2) \quad (2.8)$$

と表わせる。さらに、応力テンソルと歪増分テンソルの主軸に共軸関係があるとすれば、

$$\psi = \xi \quad (2.9)$$

となる。ここで、ケンブリッジ型の単純せん断試験では水平方向に伸縮がないと見なすことができるので、単純せん断試験の水平面と平面歪試験における伸び歪増分がゼロの方向と平行な面を等価な面と考えれば、式(2.7)、(2.8)、(2.9)より、平面歪試験に關する次のようなストレス~ダイレイタンス式が導かれる。

$$\sigma_1/\sigma_2 = R/(1-R) \cdot (-d\epsilon_2/d\epsilon_1) + 1/(1-R) \quad (2.10)$$

上式とRoweによる平面歪試験の実験データを比較したものが図-4であり、式(2.10)では実験結果をうまく説明できない

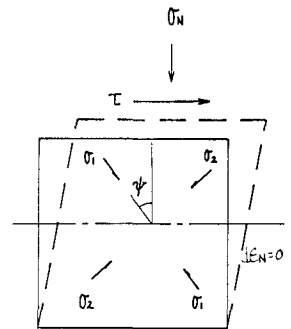


図-1 単純せん断試験

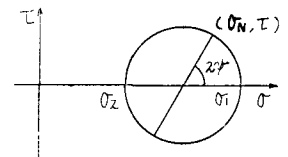


図-2 Mohrの応力円

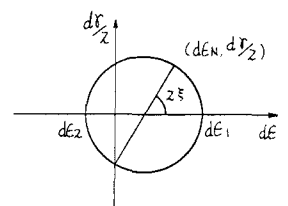


図-3 Mohrの歪増分円

いことがわかる。これに対し、平面歪試験の実験結果と良い一致を示す Rowe のストレス～ダイレイタンス式

$$\sigma_1/\sigma_2 = k \left(-\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \right) \quad (2.11)$$

$$\text{ここに、} k = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\mu}}{2} \right) \quad (2.12)$$

を用いれば、伸び歪増分ゼロの方向と平行な面上の応力比は、式(2.5)、(2.8)、(2.9)、(2.11)より、

$$\tau/\sigma_N = R' \tan \psi \quad (2.13)$$

$$\text{ただし、} R' = \frac{1}{1+k} \left(k - \frac{1}{\tan^2 \psi} \right) \quad (2.14)$$

と表わされ、図-5 は式(2.13)と Cornforth の実験データと比較したものであるが、両者は良い一致を示していることがわかる。

3 考察 まず、初めに、式(2.1)の R の定数性について考察する。

式(2.5)、(2.7)は、応力テンソルの成分の座標変換だけを用いて導かれた関係である。応力状態が静水圧に非常に近づいた場合には、式(2.7)において $\csc \varphi \rightarrow \infty$ であるから $R \rightarrow 0$ となり、明らかに式(2.2)におけるような定数性は成立しない。また、図-6 の Cole 等の実験データからは最小体積状態以後では応力テンソルと歪増分テンソルの共軸性はほぼ成立していると考えられるが、この共軸性を用いて導かれた式(2.13)と式(2.1)と比較した場合にも R の定数性は成立していない。式(2.14)と式(2.8)を用いて書き換えれば、

$$R' = \left[k \left(-\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \right) - 1 \right] / \left[(k+1) \left(-\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \right) \right] \quad (3.1)$$

となる。図-7 は上式を図示したものであるが、これより最小体積状態以後では近似的に R は定数であると思なうことができる。落合の ϕ_{μ} と $\phi_{\mu 0}$ の関係は、このような R の定数性が近似的に成立する区間を用いて導かれたものである。

また、落合は、式(2.1)と Mohr の応力円の幾何学的性質だけを用いて、主応力 σ_1 , σ_2 が

$$\sigma_1 = (\tau^2 + R \sigma_N^2) / (R \sigma_N), \quad \sigma_2 = (1 - R) \sigma_N \quad (3.2)$$

と表わされることを示した。上式は、せん断面上の応力 τ , σ_N より応力テンソルの全ての成分 σ_x , σ_y , τ_{xy} が定められることを意味している。言い換えれば、 σ_y , σ_N , τ_{xy} であれば σ_x は σ_N と τ と従属関係をもつことになる。これは、水平方向に伸縮が拘束されていることに対応している。小田小西、落合らは式(2.1)の適用範囲を明らかにしていないが、式(2.1)は、伸び歪増分ゼロの方向が常に水平方向にあるケンブリッジ型のせん断試験及び類似な特性をもつ掘り単純せん断試験の場合について成立する式であると考えられる⁸⁾。また、図-6 の共軸性が成立しない部分と図-7 の R が定数性から著しくずれる部分に対応していることも興味深い。

参考文献

- 1) Oda, M. & Konishi, J. (1974) Soils & Foundations, Vol. 14, No. 4, pp. 39-53
- 2) Oda, M. (1972) Soils & Foundations, Vol. 12, No. 4, pp. 45-63
- 3) 4) 落合英俊 (1975) 土質工学会論文集, Vol. 15, No. 4, pp. 93-100, pp. 113-118
- 5) Rowe, P. W. (1971) Proc. Roscoe Memorial Symposium, Cambridge Univ. pp. 143-194
- 6) Cornforth, D. H. (1964) Géotechnique, Vol. 14, No. 2, pp. 143-167
- 7) Roscoe, K. H., Bassett, R. H. & Cole, E. R. L. (1967) Proc. Géotech. Conf., Oslo, pp. 231-237
- 8) 福島・龍田 (1982) 第16回土質工学会研究発表会, pp. 453-456

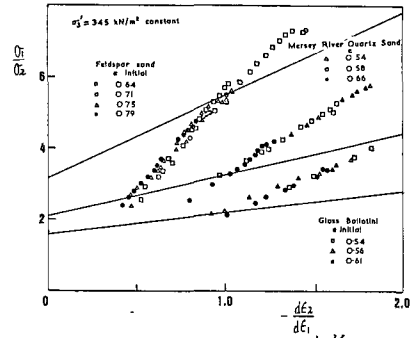


図-4 ストレス～ダイレイタンス関係

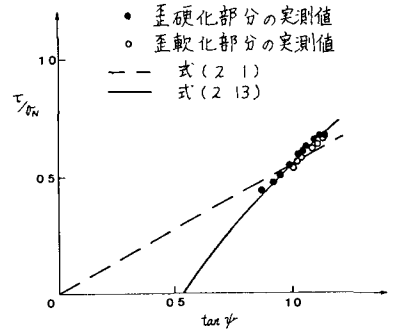


図-5 応力比～応力主軸の傾角関係

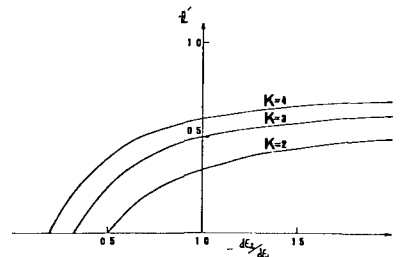


図-6 $R' \sim$ ダイレイタンス比関係

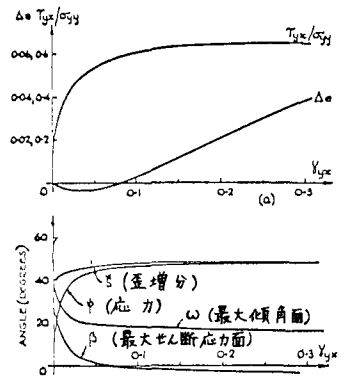


図-7 応力歪増分主軸の回転