

k-ε乱流モデルによる平板周辺の流れの計算

秋田大学 ○学生員 星 尚克
学生員 京極 敏幸
正 員 石井 千万太郎

1. はじめに

長方形断面の開水路の片側の側壁に平板が直角に突き出された場合の流れを取上げ、乱流モデルを用いて、定常流状態の水深方向に平均化された流れの数値解析を行った。乱流モデルは、いわゆる2方程式モデルの中からk-εモデルを用いた。

2. 基礎方程式

本研究の対象としている流れの境界および座標を図-1に示す。本研究では、非圧縮性流体で定常乱流の基礎方程式を水深方向に平均化し、さらに基準量 U_0 (代表流速)、 L_0 (代表長)を用いて無次元化された式を用いている。 h は水深、 $(-)$ は、水深方向に平均化された値を表している。

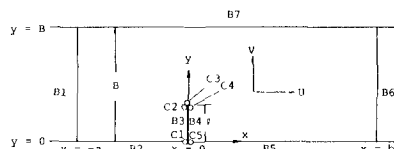


図-1

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial(h\bar{U})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{V})}{\partial y} = 0 \quad \dots (1)$$

$$x \text{ 方向運動方程式} \quad \frac{\partial(h\bar{U}\bar{U})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{U}\bar{V})}{\partial y} = -\left(\frac{1}{Fr^2}\right)h\frac{\partial h}{\partial x} - \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x}\left[h\bar{k}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[h\bar{k}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right)\right] - C_f \bar{U}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$y \text{ 方向運動方程式} \quad \frac{\partial(h\bar{U}\bar{V})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{V}\bar{V})}{\partial y} = -\left(\frac{1}{Fr^2}\right)h\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[h\bar{k}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[h\bar{k}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right)\right] - C_f \bar{V}(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

ここに C_f : 摩擦係数

$$\text{動粘性表示式} \quad \bar{\nu}_k = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad \text{ここに} \quad C_\mu: \text{定数値} \quad \bar{\epsilon}: \text{乱流のエネルギ散逸率} \quad \bar{k}: \text{乱流のエネルギ} \quad \dots (4)$$

$$k\text{-方程式} \quad \frac{\partial(h\bar{k}\bar{U})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{k}\bar{V})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\bar{\nu}_k}{\sigma_k}\frac{\partial \bar{k}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\bar{\nu}_k}{\sigma_k}\frac{\partial \bar{k}}{\partial y}\right) + h(P_h + P_{kw} - \bar{\epsilon}) \quad \dots (5)$$

$$\epsilon\text{-方程式} \quad \frac{\partial(h\bar{\epsilon}\bar{U})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{\epsilon}\bar{V})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\bar{\nu}_k}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\bar{\nu}_k}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y}\right) + h(C_{1\epsilon}\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}}P_h + P_{\epsilon w} - C_{2\epsilon}\frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}}) \quad \dots (6)$$

$$\text{ここに} \quad P_h = \bar{\nu}_k \left[2\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right)^2 \right], \quad P_{kw} = C_k \frac{U_*^3}{h}$$

$$P_{\epsilon w} = C_{\epsilon} \frac{U_*^4}{h^2}, \quad U_* = C_f(\bar{U}^2 + \bar{V}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma_k, \sigma_\epsilon, C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}, C_k, C_\epsilon: \text{定数値}$$

ここで、上式の無次元量は以下に示されるものである。式中の(*)は、次元量を示す。

$$x = \frac{x^*}{L_0}, \quad y = \frac{y^*}{L_0}, \quad \bar{U} = \frac{\bar{U}^*}{U_0}, \quad \bar{V} = \frac{\bar{V}^*}{U_0}, \quad h = \frac{h^*}{L_0}, \quad z_{\text{底}} = \frac{z_{\text{底}}^*}{L_0}, \quad \bar{\nu}_k = \frac{\bar{\nu}_k^*}{U_0 L_0}$$

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gh}}, \quad U_* = \frac{U_*^*}{U_0}, \quad P_{kw} = \frac{P_{kw}^*}{(U_0^3/L_0)}, \quad P_h = \frac{P_h^*}{(U_0^3/L_0)}, \quad \bar{k} = \frac{\bar{k}^*}{U_0^2}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\bar{\epsilon}^*}{(U_0^3/L_0)}, \quad P_{\epsilon w} = \frac{P_{\epsilon w}^*}{(U_0^4/L_0^2)} \quad \dots (7)$$

(2), (3)式では、水路床のx方向勾配を $\bar{\epsilon}_0$ の一定値とし、y方向勾配は $\bar{\epsilon}_0$ の $\bar{\epsilon}$ とされている。(4)~(6)式は、一般にk-ε乱流モデルと呼ばれている。未知量は、 $h, \bar{U}, \bar{V}, \bar{\nu}_k, \bar{k}, \bar{\epsilon}$ の6個、方程式は、(1)~(6)式の6本とあり系は閉じている。

3. 境界条件

水路工流端の境界では、 $h, \bar{U}, \bar{V}, \bar{k}, \bar{\epsilon}$ についてそれぞれ境界値が与えられ(ディリクレの条件)、水路下流端の境界では、全ての水理量のx方向の勾配をゼロとされている(ノイマン条件)。さらに、壁面境界上では

すべりなし且不透過の条件により、 $\bar{U} = 0, \bar{V} = 0$ 、壁面上での流体の運動がないことから $\bar{k} = 0, \bar{\varepsilon} = 0$ とされている。また、側壁および平板に対しては、その壁面に対する境界層が存在するとし、Launder & Spalding によって推奨されている wall-function method が用いられている。この方法によると、図-2に示す壁面での格子点を w 、その点からの壁面の法線方向の隣接格子点を p とすると、 p 点の w 点の接線方向と平行な方向の速度 U_p は、一般分布則に従い、次式で表わされるとしている。

$$\frac{\bar{U}_p}{U_{*s}} = \frac{1}{k} \ln(Re U_{*s} \gamma_p E) \quad \text{ここに } \bar{U}_p = \frac{U_p^*}{U_0^*}, U_{*s} = \frac{U_{*s}^*}{U_0^*}, k: \text{カルマン定数}$$

$$Re = \frac{U_0 L_0}{\nu}, \gamma_p = \frac{y_p^*}{L_0}$$

E : 壁面粗度の関数、滑面では 0.9

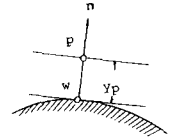


図-2

また、 p 点の $\bar{k}, \bar{\varepsilon}$ は、摩擦速度 U_{*s} との関係を仮定している。

$$\bar{k}_p = \frac{U_{*s}^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \bar{\varepsilon}_p = \frac{U_{*s}^3}{k \gamma_p} \quad \dots (9) \quad \text{ここに } \bar{k}_p = \frac{k_p^*}{U_0^2}, \bar{\varepsilon}_p = \frac{\varepsilon_p^*}{(U_0^3/L_0)}$$

4. 方程式の差分化(内点)

(1)~(6)の方程式の差分化には、中央差分を用い、数値計算には、逐次加速緩和法を用いた。一般に次式で表わされ、概要を図-3(a)に示す。

$$\phi_{I,J}^{k+1} = \phi_{I,J}^k + w \{ (A\phi_{I-1,J}^{k+1} + B\phi_{I,J+1}^{k+1} + C\phi_{I,J-1}^k + D\phi_{I+1,J}^k + E) - \phi_{I,J}^k \}$$

ここに $\phi, h, \bar{U}, \bar{V}, \bar{k}, \bar{\varepsilon}$ のいずれか

A, B, C, D, E : 係数 w : 加速パラメーター

添字 $k, k+1$ は、それぞれ k 次, $k+1$ 次の値を示す。

また、水深 h の修正式は、運動の式から求められた速度修正式の近似式

$$\varphi_{I,J}^* = \varphi_{I,J} + (F h_{I-1,J} + G h_{I,J-1} + S h_{I,J+1} + T h_{I+1,J})$$

ここに $\varphi, \bar{U}$ または $\bar{V}, F, G, S, T$: 係数

を連続の式に入力して求められている。また、数値計算には、すべての格子点で $h, \bar{U}, \bar{V}, \bar{k}, \bar{\varepsilon}$ の初期値を与える必要がある。

5. 境界付近のコントロール・ボリューム

今回の数値計算に用いられた側壁または平板の境界付近でのコントロール・ボリュームを図-3の(b)~(f)に斜線で示した。また、壁面境界より1格子点内側の所では、前述の wall-function method の(8)式が用いられ、

図-3の(b)~(f)には、(8)式が成立する領域を点で示した。さらに、前述の3. 境界条件と述べた条件を用いて、差分化を試みた。

6. おわりに

紙面の都合上、数値計算の詳細とその計算例については、講演時に発表する予定である。

<参考文献>

- 1) B.E. Launder and D.B. Spalding: "The numerical computation of turbulence flows", Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng 3, pp 276-7, 1974
- 2) 水島徹治・板倉忠興・岸カ: "乱流モデルによる開水路全流部の数値計算" 土木学会第38回学術講演会講演概要集第2部 II-179, pp 357-8
- 3) 武本行正 阿部芳彦 西村益夫: "2方程式乱流モデルによる噴流の数値シミュレーション" 第27回水理講演会論文集 土木学会 1983

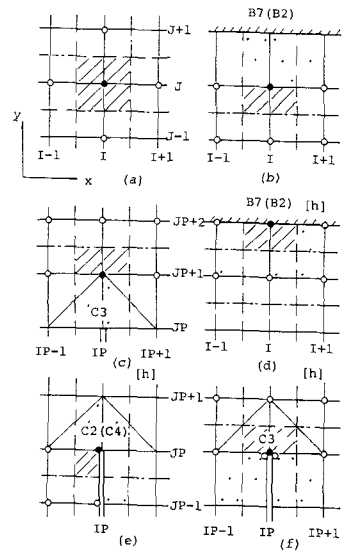


図-3