河口における不定流の数値計算法

岩手大学　土木工学科　学生員○国兼 崇史
正会員　大村 政義
正会員　平山 健一

1. はじめに　この報告は、岩手県沿岸の小河川において、潮位変動が河川水位，流量に与える影響を調べるため、不定流の数値解析を行い、計算手法とその結果について検討したものである。

2. 不定流の数値計算式　不定流の基本式は次のように表わされる。

連続式：$\frac{dW}{dt}+\frac{dQ}{dx}=0$　(1)

運動方程式：$\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+g\frac{dh}{dx}=g\left(i_0-\frac{n^2u|u|}{R^{4/3}}\right)$　(2)

W：水路断面積，Q：流　量　，R：径　深
u：平均流速　，h：水　深　，
i_0：河床勾配　，n：粗度係数，

さて、これらの連立微分方程式を数値解析法で解くものとして，Two Step Lax Wendroff 差分法と階差法（特性曲線法により解く方法）をあげてみる。

2-1 Two Step Lax Wendroff 差分法　まず、原式(1)，(2)を書き直すと次のようになる。

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{P}{\rho}\right)_b+\left(\frac{Q^2}{W}\right)\right\}=gW\left(i_0-\frac{n^2u|u|}{R^{4/3}}\right)$$

但し、$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}\right)_b=gW\frac{dh}{dx}$ である。図2-1で示すような三角型スキームを用いて、上2式から次に示すような(n) step の数値を用いて，(n+1) step の数値 Q_j^{n+1}, W_j^{n+1} を求める差分式が与えられる。

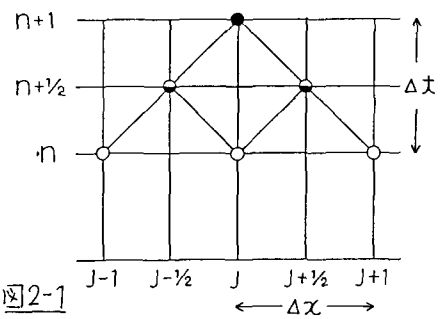

図2-1

$$\frac{W_j^{n+1}-W_j^n}{\Delta t}+\frac{Q_{j+\frac12}^{n+\frac12}+Q_{j-\frac12}^{n+\frac12}}{\Delta x}=0$$

$$\frac{Q_j^{n+1}-Q_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x}\left[\left\{\left(\frac{P}{\rho}\right)_b+\left(\frac{Q^2}{W}\right)\right\}_{j+\frac12}^{n+\frac12}-\left\{\left(\frac{P}{\rho}\right)_b+\left(\frac{Q^2}{W}\right)\right\}_{j-\frac12}^{n+\frac12}\right]=gW_j^{n+\frac12}\left(i_0-\frac{n^2u|u|}{R^{4/3}}\right)_j^{n+\frac12}$$

上流端と下流端に関しては、図2-1のような三角型スキームでは計算できないので、図2-2のボックス型スキームで計算して次に示す連続式を用いればよい。なお、上流端Q、下流端のhは境界条件により与えられるものとする。

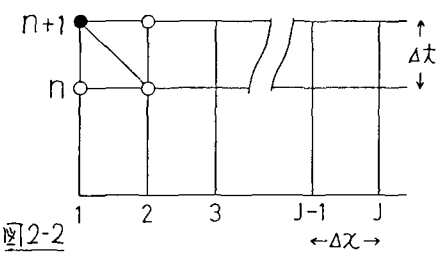

図2-2

$$\frac{W_1^{n+1}-W_1^n}{\Delta t}+\frac{W_2^{n+1}-W_2^n}{\Delta t}+\frac{Q_2^{n+1}-Q_1^{n+1}}{\Delta x}+\frac{Q_2^n-Q_1^n}{\Delta x}=0$$

2-2 階差法（特性曲線により解く方法）　図2-3において P点における値を求めるための数値は、Pを通る正、逆両特性曲線に囲まれる領域内の値を使用することが要件であるが、原式(1)、(2)を階差方程式に変換する際、ΔPRS内の値を考えてx方向の偏微係数にはR→Sの変化を、t方向の変化はB→Pへの変化で考えると次の近似式を得ることができる。

$$\left(\frac{1}{gW}\right)_B\left[(Q_P-Q_B)+2\left(\frac{Q}{W}\right)_B(Q_S-Q_P)\frac{\Delta x}{\Delta x}-\left(\frac{Q^2}{W}B\right)_B(h_S-h_P)\frac{\Delta t}{\Delta x}-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{Q^2}{W}B\lambda_0\right)_B+\left(\frac{Q^2}{W}B\lambda_0\right)_P\right\}\right]\Delta t$$
$$-(h_S-h_B)\frac{\Delta t}{\Delta x}-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n^2Q^2}{D}\right)_B-\left(\frac{n^2Q^2}{D}\right)_P\right\}\Delta t$$

$$(B)_B(h_P-h_B)+(Q_S-Q_R)\frac{\Delta t}{\Delta x}=0$$

ここでdxはR方向の距離で $dx=(\Phi-\Psi)\Delta t$ で求められる。

$\Phi=(Q/\omega)+\sqrt{gA/B}$, $\Psi=(Q/\omega)-\sqrt{gA/B}$

上流端と下流端に関しては 連続式を用いて 上流端においては(3)式、下流端においては(4)式より求められる。

$$\frac{W_1^{n+1}-W_1^n}{\Delta t}+\frac{Q_2^n-Q_1^n}{\Delta x}=0 \qquad (4)$$

$$Q_J^{n+1}=Q_{J-1}^{n+1}-(Q_J^n-Q_{J-1}^n) \qquad (5)$$

なお、上流端のQ 下流端のhは境界条件により与えられるものとする。

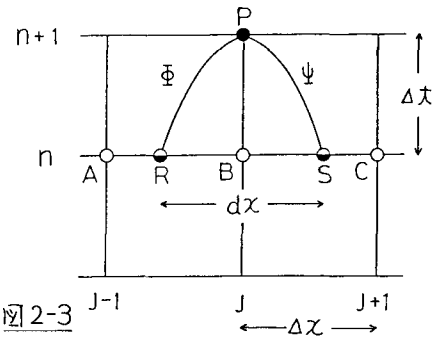

図2-3

2-3 初期値と安定条件　計算の安定条件は、$\Delta t/\Delta x(|u|-\sqrt{gh})\leq 1$ である。下に示す計算例では、$\Delta x=25$ mとしたので、$\Delta t=2$secを用いて安定な計算結果が得られた。$\Delta t=10$secでもほぼ同一の結果が得られたが、$\Delta t=20$secでは不安定となった。数値計算の初期値が適当でない場合は、それ以降の計算に影響を及ぼすので、下流端で潮位変動を与える前にならし計算をする必要があった。この際の初期値としては 不等流計算の数値を与えたところ1hr(1800 step)程度の計算により計算式に適合して、両計算方法においてほぼ同一の初期値が得られた。計算量は、Two Step Lax Wendroff の方が多いが、本方法はすでに評価をうけている方法であり、以下に述べる計算例では本方法を用いるものとする。

3. 計算例とその検討　河川の幅B，河床勾配i_0は実測した数百メートルにわたる横断面、縦断面から、平均的に求めたもので、$B=22$m、$i_0=0.0013$ とした。Δt、Δxに関しては、前にも述べたような安定条件を考慮して$\Delta x=25$ m、$\Delta t=2$secとした。下流端の水理条件である河口の潮位は、干満の差を0.5mとする一周期12時間のsin曲線をもって振動するものとした。流量に関しては本川の平水流量をやや上まわると思われる1㎥/sを与えてみた。計算の結果は図3-1に水位の変化を河口(下流端条件)，200m地点，400m地点で示した。図3-2には同地点における流量の時間変化を示したが、流量は水位の上昇と共に減少するが、潮位が各地点の等流水深に影響を及ぼす時刻近傍から再び上昇をはじめている。(図3-1参照) 水位は潮位の上昇と共に上流に影響が及び、河口の潮位との差は非常に小さくなる。図3-3には、各時刻の同時水位を与えたが、河口潮位の上昇と共に河道中に水面勾配の非常に小さい、プールのような領域が形成されていくのがみられる。今後、計算例をふやして、さらに検討を進める予定である。

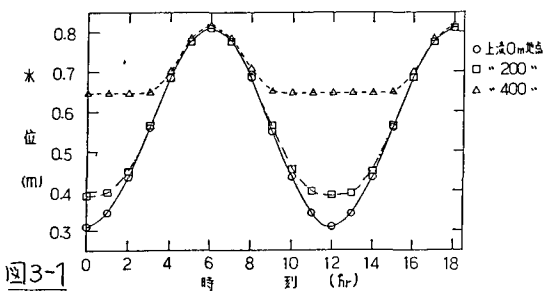

図3-1

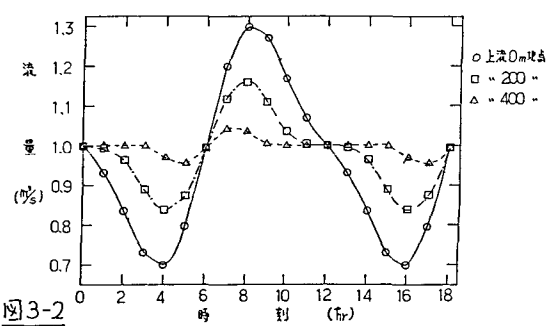

図3-2

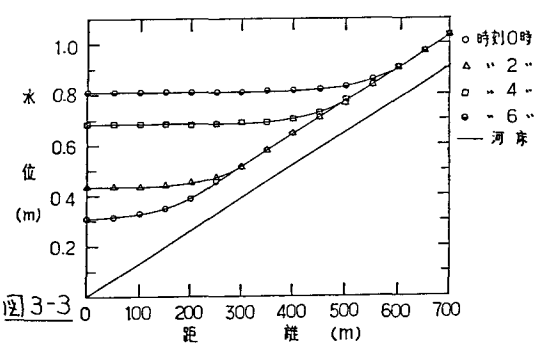

図3-3

4. 参考文献

土木学会，土木工学における数値解析／流体解析編
昭和49年

宇野木早苗，河川潮汐の研究、海岸工学講演会講演習
(第1報).1968。同(第2報).1969。同(第3報).1973。