## 回転慣性およびせん断変形を考慮した正規関数系とそれらの直交関係

八戸工業大学　正員　篠山　和男

### 1. はじめに

回転慣性およびせん断変形まで考慮した正規関数系とそれらの直交関係を、単一部材の場合について論じる。

### 2. 正規関数系

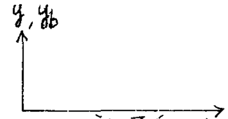


図1　座標系(正)

回転慣性およびせん断変形まで考慮した場合の連立偏微分方程式は、よく知られているように、次のとうりである。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)\right\}=\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(EI\frac{\partial^2 y_b}{\partial z^2}\right)+k\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial y_b}{\partial z}\right)=\rho I\frac{\partial^3 y_b}{\partial z\partial t^2} \qquad (2)$$

ここで　$y$：全たわみ，$y_b$：曲げモーメントだけによるたわみ，$z$：軸方向座標
$k=k'GA$，$k'$：断面形状に依存する係数，$G$：横弾性率，$A$：断面積，$\rho$：密度
$E$：ヤング率，$I$：断面2次モーメント，$t$：時間座標


図2　断面力(正)

今、$y(z,t)=Y(z)\exp(ipt)$，$y_b(z,t)=Y_b(z)\exp(ipt)$，$\theta=\dfrac{dY_b}{dz}$ とおき、式(1)，(2)を$Y$と$\theta$とで表わすと、等断面の場合には

$$k(Y''-\theta')+\rho Ap^2Y=0 \qquad (3)$$

$$EI\theta''+k(Y'-\theta)+\rho Ip^2\theta=0 \qquad (4)$$

ここで、$p$：円振動数，ダッシュ「$'$」は$z$に関する微分を意味する。

式(3)，(4)から$Y$または$\theta$を消去すれば、$Y$と$\theta$とは共に次の微分方程式を満足する。

$$F''''+(\alpha+1)\gamma^2(\gamma\ell/H)^2F''+\gamma^4\{\alpha(\gamma\ell/H)^4-1\}F=0 \qquad (5)$$

ここで、$\alpha=E/kG$，$R=\sqrt{I/A}$，$\gamma^4=\rho Ap^2/EI$，$H=\ell/R$，$\ell$：部材長，$F=Y$ または $\theta$

$Y$と$\theta$とは、式(3)，(4)で結ばれているから、式(5)の解は

i)　$\alpha(\gamma\ell/H)^4-1<0$ の場合

$$\left.\begin{aligned}Y&=C_1\sin az+C_2\cos az+C_3\,\mathrm{sh}\,bz+C_4\,\mathrm{ch}\,bz\\ \theta&=C_1f\cos az-C_2f\sin az+C_3g\,\mathrm{ch}\,bz+C_4g\,\mathrm{sh}\,bz\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここで、

$$\left.\begin{aligned}&a=\gamma\sqrt{\left\{(\alpha+1)(\gamma\ell/H)^2+\sqrt{(\alpha-1)^2(\gamma\ell/H)^4+4}\right\}/2}\ ,\ b=\gamma\sqrt{\left\{-(\alpha+1)(\gamma\ell/H)^2+\sqrt{(\alpha-1)^2(\gamma\ell/H)^4+4}\right\}/2}\\ &f=a-\alpha\gamma^2(\gamma\ell/H)^2/a\ ,\ g=b+\alpha\gamma^2(\gamma\ell/H)^2/b\\ &C_1\sim C_4\text{：定数}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ii)　$\alpha(\gamma\ell/H)^4-1>0$ の場合

$$\left.\begin{aligned}Y&=C_5\sin az+C_6\cos az+C_7\sin b'z+C_8\cos b'z\\ \theta&=C_5f\cos az-C_6f\sin az+C_7g'\cos b'z-C_8g'\sin b'z\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ここで、$b' = \gamma\sqrt{\{(\alpha+1)(\gamma l/H)^2 - \sqrt{(\alpha-1)^2(\gamma l/H)^4+4}\}/2}$ , $g' = b' - \alpha\gamma^2(\gamma l/H)^2/b'$ (9)

$C_5 \sim C_8$ : 定数

## 3. 直交関係

ラグランジュの方程式における運動エネルギーおよびひずみエネルギーに相当する項をそれぞれ $b_{rs}$, $k_{rs}$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} b_{rs} &= \int_0^l \rho A Y_r Y_s dz + \int_0^l \rho I \Theta_r \Theta_s dz \\ k_{rs} &= \int_0^l EI\Theta_r' \Theta_s' dz + \int_0^l k(Y_r' - \Theta_r)(Y_s' - \Theta_s) dz \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ここで、$r$, $s$ はモード番号である。

式(10)の $b_{rs}$, $k_{rs}$ を評価するため、式(3), (4)から

$$p_r^2(\rho A Y_r) = -k(Y_r'' - \Theta_r'),\quad p_r^2(\rho I \Theta_r) = -EI\Theta_r'' - k(Y_r' - \Theta_r) \qquad (11)$$

式(11)の第1式に $Y_s$ を、第2式に $\Theta_s$ をかけ、和をとると

$$p_r^2(\rho A Y_r Y_s + \rho I \Theta_r \Theta_s) = -EI\Theta_r''\Theta_s - k(Y_r'' - \Theta_r')Y_s - k(Y_r' - \Theta_r)\Theta_s \qquad (12)$$

式(12)を0から $l$ まで積分する。右辺は部分積分を行う。

$$p_r^2\int_0^l(\rho A Y_r Y_s + \rho I \Theta_r \Theta_s)dz = \Big|-M_r\Theta_s - S_r Y_s\Big|_0^l + k_{rs} \qquad (13)$$

ここで、$S = k(Y' - \Theta)$ : せん断力, $M = EI\Theta'$ : 曲げモーメント

同様に、式(3), (4)から

$$p_s^2\int_0^l(\rho A Y_s Y_r + \rho I \Theta_s \Theta_r)dz = \Big|-M_s\Theta_r - S_s Y_r\Big|_0^l + k_{rs} \qquad (14)$$

式(13), (14)の右辺の第1項はどのような境界条件のもとでも常にゼロとなり、右辺の値は共に $k_{rs}$ となるから、差をとれば

$$(p_r^2 - p_s^2)\int_0^l(\rho A Y_r Y_s + \rho I \Theta_r \Theta_s)dz = 0 \quad 即ち \quad (p_r^2 - p_s^2)\, b_{rs} = 0 \qquad (15)$$

従って、$r \neq s$ なら $b_{rs} = 0$ となる。$b_{rs} = 0$ $(r \neq s)$ なら、式(13) または (14) から $k_{rs} = 0$

故に、$r \neq s$ なら $b_{rs} = 0$ かつ $k_{rs} = 0$ となり、直交関係が成り立つ。

## 4. おわりに

互いに独立でない $Y$ と $\Theta$ とが一対で直交関係が成立し、正規関数系をなす。$Y$ または $\Theta$ だけでは直交関係が成立しないことに注意する必要がある。また、細長比 $H$ を無限大にすれば曲げだけの場合に帰着する。従って、曲げだけの場合は、細長比が無限大のときの解であるといえる。

## 参考文献


1) チェモシェンコ：工業振動学

2) Y.C ファン ：固体の力学/理論