積分方程式による平板の衝撃応答解析

岩手大学工学部　学生員　○藤原　道明
岩手大学工学部　正　員　　岩崎　正二

1．まえがき

衝撃力を受ける構造物の変形や応力は、静的な荷重を受ける場合に比べてその様相が異なり、その初期挙動を明らかにすることは工学上重要である。　特に近年、落石、雪崩などを防止するために作られるロックシェッドやスノーシェッドおよび防護柵の設計荷重の見直しの問題、あるいは原子力施設、電力施設構造物に対する耐衝撃性の問題など土木構造物においても衝撃荷重に対する安全性の検討が必要になってきている。　本論文では剛球が弾性床上平板に衝突する問題を衝撃荷重を仮定することなく衝撃速度を与え、接触点での局部変形にＨｅｒｔｚの接触理論式を適用することにより非線型積分方程式を導き数値解析により衝撃力を求め、その衝撃力によって生じる平板の過渡的性状を明らかにしようとしたものである。

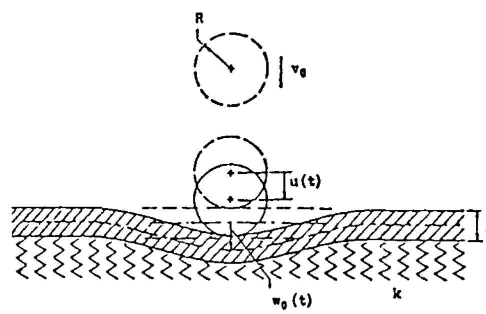
2．解析理論

弾性床上無限平板のたわみの曲げ振動方程式は極座標を用いて表わすと、次式のようになる。

$$\left(D\nabla^4+k+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで、

$$\nabla^4=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2, \quad D=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1^2)}$$



図－1

E_1は板の弾性係数、ν_1は板のポアソン比、ｈは板の厚さ、ρは板の単位体積質量、ｋは基礎係数、ｗは任意点のたわみを表わす。

ｒ＝０に集中衝撃荷重　Ｐ（ｔ）が作用する場合には、上式にハンケル・ラプラス変換を行なう。

$$\tilde{\bar{w}}=\frac{Cb^2}{2\pi D}\frac{\bar{P}(s)}{s^2+Kb^2+Cb^2\xi^4} \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここで、

$$\tilde{w}(\xi,t)=\int_0^\infty rw(r,t)J_0(\xi,r)\,dr$$

$$\bar{w}(r,s)=\int_0^\infty w(r,t)e^{-st}\,dt, \quad \bar{P}(s)=\int_0^\infty P(t)e^{-st}\,dt$$

$$Cb^2=\frac{D}{\rho h}, \quad Kb^2=\frac{k}{\rho h}$$

式（２）を逆変換すると、接触点でのたわみ　$w_0(t)$は

$$w_0(t)=\frac{Cb}{8D}\int_0^t P(\tau)J_0(Kb(t-\tau))\,d\tau \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで　J_0　は０次のベッセル関数を表わす。

また板の中心に剛球がv_0の速度で衝突する場合、剛球の質量をＭ、剛球の板へのくいこみ深さをδとすると剛球の運動方程式は次のようになる。

$$M(\ddot{w}_0+\ddot{\delta})=-P(t) \qquad \cdots\cdots(4) \qquad \ddot{\ }=\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ここで、w_0は衝撃点のたわみを表わす。

上式を解くと剛球の変位　ｕ（ｔ）は

$$u(t)=w_0+\delta=-\frac{1}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)\,d\tau+\nu_0 t \quad \cdots\cdots(5)$$

一方、Hertz の接触理論よりＰとδの関係を次式のように仮定する。

$$\delta=KP^{\frac{2}{3}} \quad \cdots\cdots(6)$$

ここで、

$$K=s\left[\frac{9\pi^2(k_1+k_2)^2}{256C_R}\right]^{\frac{1}{3}}、\quad k_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}、\quad k_2=\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$$

ν_2、E_2はそれぞれ剛球のポアソン比とヤング率を表わす。

また、C_R 、ｓは接触する２物体間の接触面の主曲率の大きさと二つの曲面の主曲率平面のなす角とに関係する定数で表によって与えられている。[1]

今、特別な場合として半径Ｒの球が平面に接触する場合は　$C_R=R/2$、$s=2$　となる。ただしＲは剛球の半径を表わす。

式（３）、（６）を式（５）に代入すると剛球が衝突した場合に発生する衝撃力Ｐを定める非線型積分方程式が得られる。

$$KP^{\frac{2}{3}}(t)+\frac{Cb}{8D}\int_0^t P(\tau)J_0(Kb(t-\tau))\,d\tau+\frac{1}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)\,d\tau=\nu_0 t \quad \cdots\cdots(7)$$

次に、簡略理論として弾性床上無限平板の中央に集中荷重が作用した場合の静的な解を使うと最大衝撃力Ｐを求める次のような６次方程式が求まる。

$$B^3P^6+C^3P^5+3AB^2P^4+3A^2BP^2-A^3=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

ここで、

$$A=Wh、\quad B=\frac{1}{16\lambda^2 D}、\quad C=\frac{2}{5}K、\quad \lambda^4=\frac{k}{D}$$　Ｗは剛球の重量を表わす。

また　Ｂ＝０とすると剛球が平面に落下した場合の最大衝撃力の式となる。

３．数値計算例

数値計算例は弾性床上無限平板に剛球が衝突する問題を扱った。数値積分に際してはシンプソンの１／３則、あるいは３／８則を使い、時間の刻みは１μｓｅｃとした。

また計算にあたっては次のような数値を用いた。

板厚　$h=0.5、1.0、1.5、\infty$　（ｃｍ）

$E_1=E_2=2.1\times10^6$ （ｋｇ／ｃｍ²）

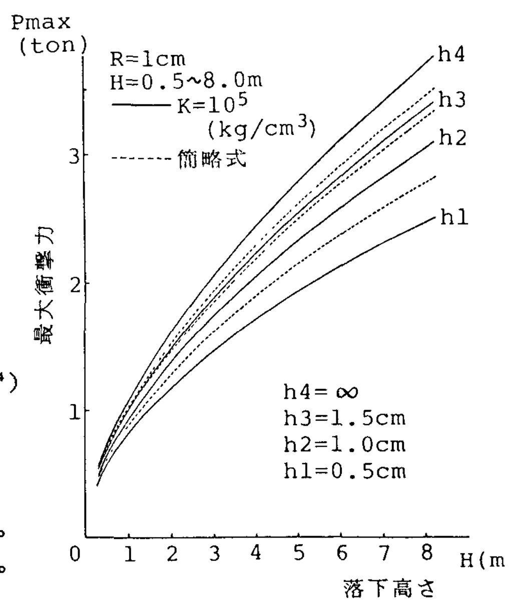
$\nu_1=\nu_2=0.3$

$\rho_1=\rho_2=0.801\times10^{-5}$ （ｋｇ・ｓｅｃ²／ｃｍ⁴）

$k=10^5$ （ｋｇ／ｃｍ³）　、　$R=1.0$　（ｃｍ）

$H=0.5\sim8.0$　（ｍ）

図－２は衝撃力の最大値を、平板厚さをパラメータとして落下高さを変化させた場合について図示したものである。図中の一点鎖線は式（８）の簡略理論の値を表わしている。



図－２

参考文献

１）　Ｌｏｎｇｉｎ　Ｂ．　Ｇｒｅｓｚｃｚｕｋ、ＩＭＰＡＣＴ　ＤＹＮＡＭＩＣＳ、Ｐ６０

２）　岩崎正二、出戸秀明、能町純雄、剛球により衝撃された平板の初期挙動について、第３８回土木学会全国大会講演概要集、Ｐ１２１