

1. はじめに

構造物の限界状態設計を行う立場から、動的解析においても弾塑性を考慮した解析を行うことが多くなってきている。この動的弾塑性解析を行う場合には、直接数値積分法が一般に用いられている。線形動的応答解析に種々の数値積分法を適用する場合の精度については、いくつか研究^{1), 2)} がなされているが、非線形解析についてはあまり研究³⁾ が行われていない。

そこで本研究では、直接数値積分法として、Newmarkの β 法 ($\beta = 1/4, 1/6$)、Wilson の θ 法、4次のRunge-Kutta法⁴⁾を用いて、2自由度弾塑性解析を行い、各数値積分法の精度を厳密解と比較することにより検討した。

2. 解析モデル

対象とした2自由度解析モデルは、図-1に示すようなせん断型質点バネ系モデルとし、バネの復元力特性は図-2に示すような完全弾塑性型とする。粘性減衰の影響を無視すると振動モデルの運動方程式は、

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + R_1 + R_2 &= f_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + R_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここに復元力 R_i は、バネの弾性・塑性に応じて、

$$\begin{aligned} R_i &= \pm R_{iy} - K_i (Y_{im} - Y_i) : \text{弾性} \\ &\pm R_{iy} : \text{塑性} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

と表せる。ここで、 R_{iy} は降伏復元力、 K_i はバネ定数、 $Y_i = x_i$ 、 $Y_2 = x_2 - x_1$ (相対変位)、 Y_{im} は復元力を求める基準となる塑性変位である。質点に作用する外力 f_i は、

$$f_i = P \sin \omega t \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

と表される正弦波外力とする。

3. 解析結果

本研究では、表-1の諸元を持つ場合についてだけ解析した。この計算例では、振動モデルの下の方のバネだけが塑性化する。図-3には、質点1、2の変位応答、加速度応答の厳密解を示す。縦軸が変位応答 (塑性変位によって無次元化)、加速度応答を、横軸が経過時間を外力の周期で無次元化して表している。実線が質点1破線が質点2の応答である。正弦波外力の振動数が1次固有振動数に非常に接近して

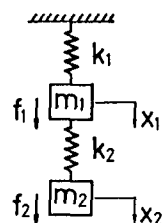


図-1 振動モデル

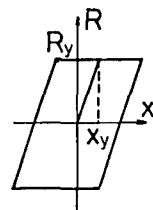


図-2 復元力特性

表-1 解析モデル諸元

$m_1=1, m_2=8(\text{kg})$
$K_1=4, K_2=2(\text{kN/m})$
$\omega_1=12.82(\text{rad/s})$
$\omega_2=78.01(\text{rad/s})$
$R_{2y}=20, P=4(\text{N})$
$\omega=12.75(\text{rad/s})$

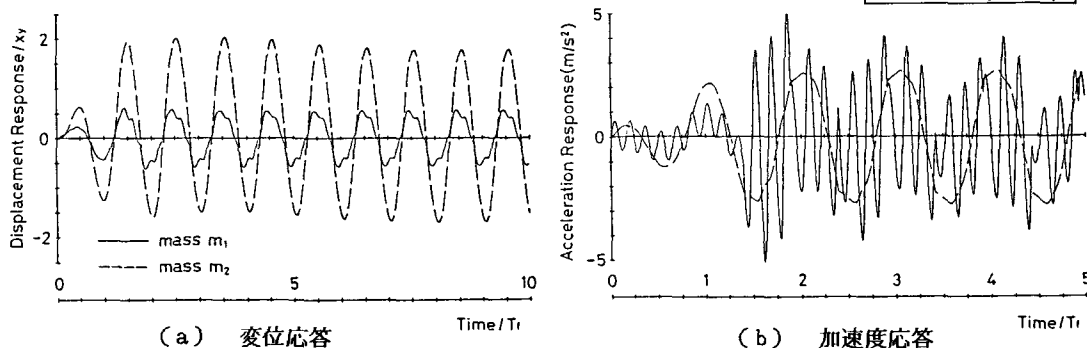


図-3 振動モデルの厳密解応答

いるので、共振現象によって応答の振幅が増加する。しかし、バネが塑性化するとしだいに定常的な振動となっている。加速度応答では、バネが塑性化した後、質点1の応答の2次波形の影響が非常に大きくなっていることが注目される。

図-4には、質点2の変位応答だけについて、数値積分の時間刻み Δt を外力の周期の1/64とした場合の結果を示している。○、◇、X、+がNewmarkの β 法($\beta=1/4, 1/6$)、Runge-Kutta法、Wilsonの θ 法によるものであり、実線が厳密解である。数値積分法による結果は、1サイクルについて8点だけを描いている。バネが塑性化して以降、いずれの手法も振動振幅が厳密解に対して下方に移動した結果となっている。その中では、Runge-Kutta法による結果が最もよく厳密解に一致しているのに対して、Newmarkの β 法($\beta=1/4$)による結果が厳密解に対して最も大きく下方にずれている。しかし定常状態における両振幅の大きさは厳密解によく一致している。

図-5は、 $\Delta t = T_f/16$ の場合の結果である。この場合も、Runge-Kutta法による結果が最もよく厳密解に一致している。Newmarkの β 法($\beta=1/6$)は厳密解に比較して両振幅が小さくなっている。 $(\beta=1/4)$ による結果は、定常状態において上下に振動している。Wilsonの θ 法による結果は、下方に移動しているが、その両振幅は比較的良好に一致している。

数値積分法の精度の目安として、10サイクル目の両振幅の厳密解に対する比を時間刻みごとに表-2に示す。時間刻みを小さくすれば、Runge-Kutta法による結果の精度が最もよい。しかしRunge-Kutta法では $\Delta t = T_f/12$ 以上で、Newmarkの β 法($\beta=1/6$)では $\Delta t = T_f/8$ 以上で、解が発散している。

図-6は、 $\Delta t = T_f/64$ のときのRunge-Kutta法とNewmarkの β 法($\beta=1/4$)による質点1の加速度応答の結果を厳密解とともに示したものである。Runge-Kutta法による結果がよく厳密解に一致しているのに対して、Newmarkの β 法による結果は振幅がかなり大きくなっている。

《参考文献》

- 1、水田・西山・平井：Newmarkの β 法における位相遅れ補正の一方法、土論集、268号、pp.15~21、1977-12
- 2、清水・渡辺他：大次元常微分方程式の直接数値積分法、機論集、pp.1272~1289、1977-4
- 3、倉西・中島：動的弾塑性解析において生ずる誤差について、東北支部発表会概要 pp.17~18、1982-3
- 4、戸川：有限要素法による振動解析、サイエンス社、1975

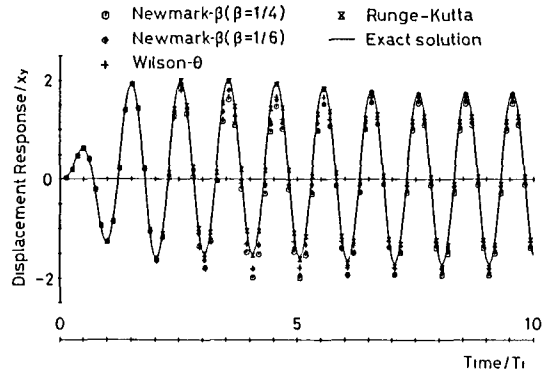


図-4 質点2の変位応答 ($\Delta t = T_f/64$)

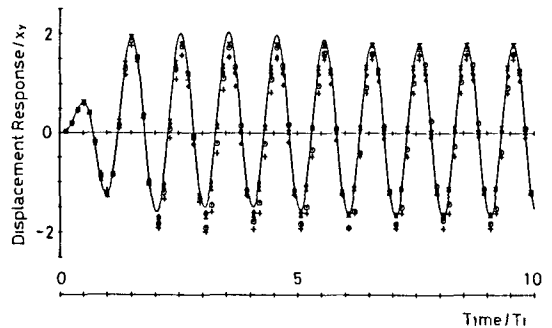


図-5 質点2の変位応答 ($\Delta t = T_f/16$)

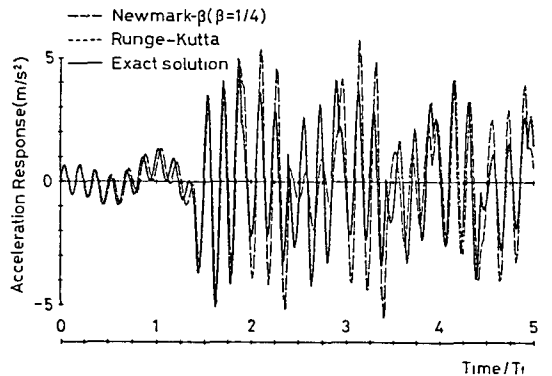


図-6 質点1の加速度応答 ($\Delta t = T_f/64$)

表-2 数値積分法の精度の比較

	1/64	1/32	1/16	1/12	1/8
Newmark $\beta=1/4$	0.995	0.972	0.981	0.989	1.074
$\beta=1/6$	0.995	0.996	0.921	1.041	△
Wilson θ	0.988	0.964	0.978	0.952	0.857
Runge-Kutta	0.999	0.989	0.982	△	△