

# 境界要素法による変断面はりの解法

岩手大学工学部 正 員 ○出戸 秀明  
同 上 正 員 宮本 裕  
同 上 正 員 岩崎 正二

## 1. はじめに

はりの微分方程式の解法として、前回に基本解を用いた境界積分方程式による手法を示した。ここでは、基本解の得られていない変断面はりの解法として、等断面はりの基本解を用いた場合の離散化による数値計算の手法を示し、その結果が従来の方法によるものと一致することを確かめている。

## 2. 解 法

図-1.のような変断面のはりに分布荷重  $q(x)$  が作用するとき、微分方程式は、

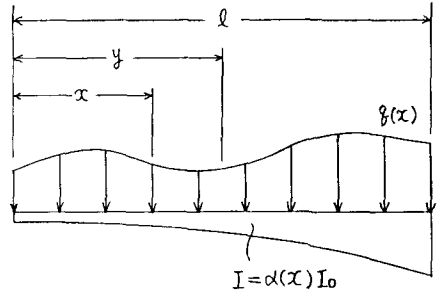


図-1

$$EI_0 \frac{d^2}{dx^2} \left[ \alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x) \quad (1)$$

ただし、 $EI_0$  はある基準点でのはりの曲げ剛性、 $\alpha(x)$  は曲げ剛性の変化を表す関数。

いま無限長はりの基本解が得られていない変断面のはりについて考える。

$$\int_0^l EI_0 \frac{d^2}{dx^2} \left[ \alpha(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] w^*(x, y) dx = \int_0^l q(x) w^*(x, y) dx \quad (2)$$

ただし、 $w^*(x, y)$  は  $EI_0 d^4 w^*(x, y)/dx^4 = \delta(x-y)$  —— (3) を満たす等断面はりの基本解。

式(2)を4回部分積分したものに式(3)を代入して、デルタ関数の性質を考慮すれば、次式が得られる。

$$\alpha(y) w(y) = \left[ Q(x) w^*(x, y) - M(x) \theta^*(x, y) + \theta(x) \alpha(x) M^*(x, y) - w(x) \left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M^*(x, y) - \alpha(x) Q^*(x, y) \right\} \right]_{x=0}^{x=l} \\ + \int_0^l q(x) w^*(x, y) dx + \int_0^l w(x) \left[ \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M^*(x, y) \right\} + \frac{d\alpha(x)}{dx} Q^*(x, y) \right] dx \quad (4)$$

ただし、 $\theta^*(x, y) = dw^*(x, y)/dx$ ,  $M^*(x, y) = -EI_0 d^2 w^*(x, y)/dx^2$ ,  $Q^*(x, y) = -EI_0 d^3 w^*(x, y)/dx^3$

ここで、等断面はりの基本解を用いたために、式(4)右辺最後の項が現れ、これを解く方法のひとつとして、領域  $0 \leq x \leq l$  にいくつかの代表点のたわみを未知数に加えて、式(4)を離散化して解く方法が考えられる。

いま領域  $0 \leq x \leq l$  を  $n$  分割したときの式(4)右辺最後の項について考える。

$$G(y) = \int_0^l w(x) F(x, y) dx \quad (5)$$

$$F(x, y) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d\alpha(x)}{dx} M^*(x, y) \right\} + \frac{d\alpha(x)}{dx} Q^*(x, y)$$

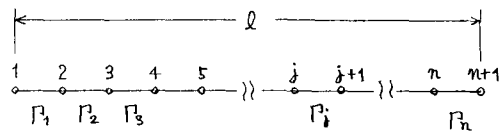


図-2.

式(5)を領域  $\Gamma_j$  について Gauss の4点積分公式により近似すると、

$$G(y) = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} w F dx = \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^4 M_{\Gamma_j 1} F_j(\xi_k, y) f_k \cdot J, \sum_{k=1}^4 M_{\Gamma_j 2} F_j(\xi_k, y) f_k \cdot J \right] \begin{Bmatrix} w_{\Gamma_j 1} \\ w_{\Gamma_j 2} \end{Bmatrix}$$

ただし、 $\xi$ は無次元座標  $\xi = 2nx/l$ ,  $M_{p,j1} = -(\xi-1)/2$ ,  $M_{p,j2} = (\xi+1)/2$ ,  $J = l/2n$ ,  $f_R$ は重み関数。

これより式(5)は、

$$G(y) = [H_{11}, H_{12}+H_{21}, H_{22}+H_{31}, \dots, H_{j-1,2}+H_{j,1}, \dots, H_{n,2}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ただし、 $H_{j1} = \sum_{k=1}^4 M_{p,j1} F_j(\xi_k, y) f_k J$ ,  $H_{j2} = \sum_{k=1}^4 M_{p,j2} F_j(\xi_k, y) f_k J$

これを式(4)に戻して、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 w_1 &= a_{11}Q_2 + a_{12}M_2 + a_{13}\theta_2 + a_{14}w_2 + b_{11}Q_0 + b_{12}M_0 + b_{13}\theta_0 + b_{14}w_0 + g_1 \\ &\quad + C_{11}w_1 + C_{12}w_2 + C_{13}w_3 + \dots + C_{1,n+1}w_{n+1} \\ \alpha_2 w_2 &= a_{21}Q_2 + a_{22}M_2 + a_{23}\theta_2 + a_{24}w_2 + b_{21}Q_0 + b_{22}M_0 + b_{23}\theta_0 + b_{24}w_0 + g_2 \\ &\quad + C_{21}w_1 + C_{22}w_2 + C_{23}w_3 + \dots + C_{2,n+1}w_{n+1} \\ \alpha_3 w_3 &= a_{31}Q_2 + a_{32}M_2 + a_{33}\theta_2 + a_{34}w_2 + b_{31}Q_0 + b_{32}M_0 + b_{33}\theta_0 + b_{34}w_0 + g_3 \\ &\quad + C_{31}w_1 + C_{32}w_2 + C_{33}w_3 + \dots + C_{3,n+1}w_{n+1} \\ &\vdots \\ \alpha_{n+1}w_{n+1} &= a_{n+1,1}Q_2 + a_{n+1,2}M_2 + \dots + b_{n+1,1}Q_0 + b_{n+1,2}M_0 + \dots + g_{n+1} \\ &\quad + C_{n+1,1}w_1 + C_{n+1,2}w_2 + C_{n+1,3}w_3 + \dots + C_{n+1,n+1}w_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  はそれぞれの分割点での基本解の値を、 $g_i$ は式(4)右辺第2項を表わし、 $C_{ij}$ は式(6)より導かれる係数である。また、 $w_1 = w_0$ ,  $w_{n+1} = w_2$ 、 $Q, M, \theta$ に関しても同様である。

さらに式(4)を  $y$  について微分し、 $y=0$ ,  $y=l$  を代入して得られる2本の式と式(7)を合わせて、 $n+3$ 本の式を得る。境界における8個の量と分割点のため  $n-1$ 個のうち、境界条件によって規定される4個の境界量を除く  $n+3$ 個の未知量は、これらの式より求められることになる。

### 3. 数値計算例

計算例として、 $\alpha(x) = 1+m(x/l)$ ,  $\alpha(x) = 1+m(x/l)^2$ ,  $\alpha(x) = 1+m(x/l)^3$  としたときの分割点でのためと未知の境界量を表-1に示す。( )内の値はNewmark's methodによる計算結果である。いずれも1%程度の誤差で一致している。なお、数値計算にあたっては、単純支持とし、分割数  $n=4$ ,  $m=1$ ,  $l=2.0m$ ,  $EI_0=1.0 \text{ t} \cdot m^2$ ,  $q(x)=3.0 \text{ t}$  とした。

### 4. おわりに

ここで得られた未知量を式(4)に戻せば任意の点でのためが求められ、さらに式(4)を1回微分したものからため角が、2

回微分したものからモーメントが、3回微分したものからせん断力が次々に求められることになる。

### 参考文献

- 1) C.A. Brebbia: The Boundary Element Method for engineers (1978)
- 2) 田中正隆、田中喜久昭: 境界要素法—基礎と応用、丸善、(1982)
- 3) 成岡昌夫: ニューマークの数値計算法、技報堂、(1978)

|            | $1+m(x/l)$              | $1+m(x/l)^2$            | $1+m(x/l)^3$            |
|------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $w_2$      | 0.317116<br>(0.31518)   | 0.373700<br>(0.37147)   | 0.402655<br>(0.40075)   |
| $w_3$      | 0.421732<br>(0.42204)   | 0.497494<br>(0.49735)   | 0.544342<br>(0.54295)   |
| $w_4$      | 0.286776<br>(0.28840)   | 0.333760<br>(0.33618)   | 0.365347<br>(0.36781)   |
| $\theta_1$ | 0.743603<br>(0.72204)   | 0.856887<br>(0.85029)   | 0.914855<br>(0.91219)   |
| $\theta_5$ | -0.628215<br>(-0.63634) | -0.722216<br>(-0.73735) | -0.785400<br>(-0.80663) |
| $Q_1$      | 2.999979<br>(3.0)       | 2.999987<br>(3.0)       | 2.999720<br>(3.0)       |
| $Q_5$      | -2.999988<br>(-3.0)     | -2.999953<br>(-3.0)     | -2.999727<br>(-3.0)     |

表-1.