圧裂試験における同心円柱の応力分布

秋田大学 正員 川上 洵
〃 学生員 菅原 俊次
〃 〃 ○菅原 純

1. まえがき

セメントコンクリートの欠点を補う目的から、セメントコンクリートの表面をポリマーセメントコンクリートやレジンコンクリートで被覆した合成構造そしてそれ自身が複合体である部分ポリマー含浸コンクリート等は、その機能を果すにあたり、引張応力を受けるとか、引張強度が要求される場合も多い。 セメントコンクリートのみの単一部材に対しては、JIS に規定されているような圧裂試験により引張強度が得られ、その強度をもとに設計も行える。しかし、ポリマー被覆や部分含浸部材に対して、単一部材のときと同じ試験により得られるのは、みかけの引張強度であり、その理論的根拠もない。 本研究は、材料の性質が異なる二種以上のコンクリートでつくられた同心円柱に圧裂荷重が載荷されたとき、その応力，ひずみ分布そして変位を弾性学より明らかにし，複合部材の力学的評価を示す目的で行ったものである。

2. 解析

中心を含め i 層のコンクリートよりなる図-1のような同心円柱に圧裂荷重 P を載荷する。

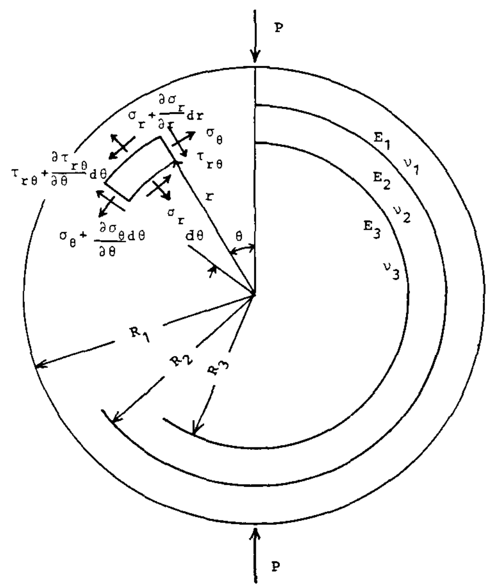

Fig. 1 Concentric Circular Cylinder Constituted by i kinds of Concretes

2.1. つりあい式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\&\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

2.2. フックの法則 (平面ひずみ)

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\{(1-\nu)\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta\}\\&\sigma_\theta=\frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\{\nu\varepsilon_r+(1-\nu)\varepsilon_\theta\}\\&\tau_{r\theta}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{r\theta}=G\gamma_{r\theta}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

2.3. ひずみ-変位関係 (u: 半径方向の変位, v: 接線 〃)

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}\\&\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\\&\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

式(3)を(2)へ代入すると応力と変位の関係式を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{2G}{(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial r}+\nu\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}\\&\sigma_\theta=\frac{2G}{(1-2\nu)}\left\{\nu\frac{\partial u}{\partial r}+(1-\nu)\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\right\}\\&\tau_{r\theta}=G\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

さらに、式(4)を(1)へ代入することにより、つりあい式を変位で表わすことができる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u+\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}-\frac{(3-4\nu)}{2(1-\nu)}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}=0\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}+(3-4\nu)\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+2(1-\nu)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+(1-2\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+(1-2\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-(1-2\nu)\frac{v}{r^2}=0
\end{aligned}
\right\}\quad(5)
$$

式(5)の解を得るために，半径および接線方向の変位 u, v を次式のように仮定する。

$$
\left.
\begin{aligned}
u&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,U(r)\cos n\theta\\
v&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,V(r)\sin n\theta
\end{aligned}
\right\}\quad(6)
$$

uに関して、 $n=0$ と $n=1$ 以上の2つの場合に分けて以下解析を行なう

$$u=u_0+u_1 \qquad (7)$$

2、4. 荷重の級数表示

$$p(\theta)=\frac{p}{\pi R_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\{1+(-1)^n\}\cos n\theta\right] \qquad (8)$$

2、5、変位，ひずみおよび応力

式(7)を式(5)へ代入し、連立微分方程式を解く。その結果，変位は、次式のとおりである。

$$
\left.
\begin{aligned}
u_0&=C_1 r+C_2\frac{1}{r}\\
u_1&=\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\left\{A_{n1}r^{-(n+1)}+A_{n2}r^{(n-1)}+A_{n3}r^{-(n-1)}+A_{n4}r^{(n+1)}\right\}\cos n\theta\\
v&=\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\left\{A_{n1}r^{-(n+1)}-A_{n2}r^{(n-1)}+\frac{(n+4\nu-4)}{(n-4\nu+2)}A_{n3}r^{-(n-1)}-\frac{(n-4\nu+4)}{(n+4\nu-2)}A_{n4}r^{(n+1)}\right\}\sin n\theta
\end{aligned}
\right\}\quad(9)
$$

式(9)を式(4),(3)へ代入して応力およびひずみを得る。

2、6、境界条件

$r=R_1$ で　$n=0$ ：　$\sigma_{0r}=p(\theta)$

$n=2,4,6\cdots$ ：　$\sigma_{1r}=p(\theta)$，　$\tau_{r\theta}=0$

$r=R_k$ で

$n=0$ ： $\begin{cases} u_{0,k-1}=u_{0,k}\\ \sigma_{0r,k-1}=\sigma_{0r,k}\end{cases}$

$n=2,4,6\cdots$ ： $\begin{cases} u_{1,k-1}=u_{1,k}\\ v_{1,k-1}=v_{1,k}\\ \sigma_{1r,k-1}=\sigma_{1r,k}\\ \tau_{1r\theta,k-1}=\tau_{1r\theta,k}\end{cases}$

$r=0$ で

$n=0$ ： $u_{0i}=0$

$n=2,4,6$ ： $u_{1i}=0$，$v_i=0$

3、数値計算例

$P=1$ kgf/cm，$R_2/R_1=0.6$（2層）の場合、弾性係数比を変化させたときの鉛直線上の応力分布（水平方向）を図-2に示す。

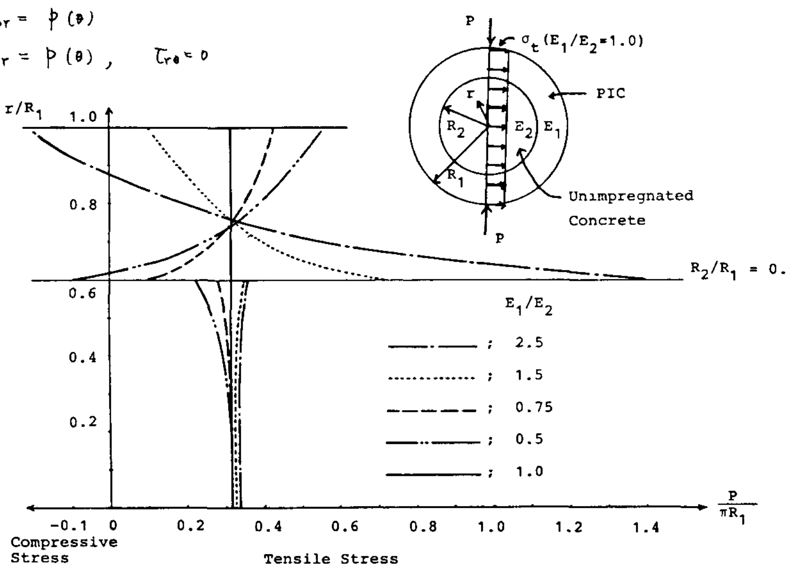

Fig. 2 Relation between Stress distribution of partially polymer-impregnated concrete and it's ratio of modulus of elasticity