主応力回転時の砂の変形挙動に関する考察

東北大学工学部（正）飛田 善雄

1. まえがき　従来，砂の変形挙動は何らかの応力比により支配されるものと考えられていた。近年になり，Arthur ら[1]および石原ら[2]は，主応力方向を回転できる試験装置により応力比及び平均主応力を一定に保っても塑性的変形が観察される事を示した。主応力方向の回転は現場等においても起こり得る現象であり特に海洋地盤，地震時の斜面安定等には重要なものと考えられる。この報告では，砂のセン断履歴に伴う内部構造変化を考慮する事が，この現象の理解に重要である事を２つのアプローチに基づき議論する。

2. モビライズド面及びダイレタンシー角に基づく考察

ここでは，簡単のために，砂の変形が単純セン断的なものである事を仮定する。いま主応力状態で載荷され，$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}\right)$ までセン断されたものとする。この時，松岡[3]あるいは Nemat Nasser & Tobita[4]に従い，stress-dilatancy 式をモビライズド面（すべり面）を基準にして求める。ϕ = const. の状態において，モビライズド面は σ_1 の作用面より $(135^\circ-\frac{\phi}{2})$（$S_1$ と記す）及び $(45^\circ+\frac{\phi}{2}, S_2)$ をなす。[図-1(a)]。この面より実際の微視的すべり方向をモビライズド面より計測した角度を ν とし，ダイレタンシー角と呼ぶ。（反時計回りを正とする）[図2]，ダイレタンシー角の確率密度関数を $p(\nu)$ で表わす時，Nemat Nasser & Tobita によれば次の式が得られる。[4]

$$-\frac{1}{V}\frac{\dot{v}}{\dot{\gamma}} = \int_{\nu^-}^{\nu^+} p(\nu)\,\frac{\cos(\phi_\mu+\nu)\sin\nu}{\cos\phi_\mu}\,d\nu \qquad (1)$$

（ν^-, ν^+）の範囲で，すべり条件が満足される。
$\dot{v}$，体積ひずみ増分（圧縮正）

ここに ϕ_μ は粒子の（固有）摩擦角である。簡単な仮定により，右辺を応力の関数として表現する事ができる。この様な考え方によれば，最初にすべりを生じさせるのは，負のダイレタンシー角を有する粒子接点であり，その結果，負のダイレタンシーが現われる。セン断変形が進むと，ダイレタンシー角は次第に正に片寄る事になり，正のダイレタンシーがでてくる。このモデルでは，ダイレタンシー角が正に片寄るという事に，セン断に伴う構造変化が表現されている。図1-(a)では正のダイレタンシーを生ずる様な場合を描いている。$(\bar{\varepsilon} = \nu p(\nu))$，載荷経路を除荷していくと，そこに現われる挙動は弾性的である事は，よく知られた事実である。[単調な載荷，除荷]

さて，ϕ を一定にし，セン断応力 τ を加える事により主応力軸を回転させる。ある範囲内で弾性的変形が生じ図1-(b)の状態になったものとする。ここでは，構造変化がこの過程でそれほど生せず，構造異方性は保持されるものと考える。この時，モビライズド面も又，図1-b に示す様に主応力軸の回転量 θ と同じく回転する。主応力軸状態にあっては，S_1, S_2 両者共等価なダイレタンシー角を有し，ある変形段階ではその夫レかが活動するものと考えられるが，主応力回転後は，S_2' が負のダイレタンシー角を有し，S_1' が正のダイレタンシー角を有している。モビライズド面に作用している垂直力 Σ，セン断力 T を ν 面により分割すると（図2）次の式が成立する；

$$\Sigma(\nu) = \Sigma\cos\nu - T\sin\nu\,,\quad T(\nu) = \Sigma\sin\nu + T\cos\nu \qquad \text{（図の}\nu\text{を正としている。）} \qquad (2)$$

$T(\nu)/\Sigma(\nu)$ がすべりの支配要因であるので，(2)式により S_2' の活動が生じ，負のダイレタンシーが生じる。

以上の議論により，主応力回転時には，負のダイレタンシーを生じさせる塑性的変形が考えられ，それは非排水状態では，間げき水圧の上昇につながる事になる。モビライズド面に基づく考察は比較的直観的であり，松岡らにより，詳しい議論がなされているが，(1)三次元的拡張が難しい。(2)セン断ひずみの大きさの決定が難しい，などの理由から次に砂の変形挙動を移動（等方）硬化体として把えた場合につき，主応力回転時の変形を考察する。

3. 移動（+等方）硬化論*に基づく考察　（* 異方硬化論ともいわれる）

砂のセン断履歴による硬化（弾性的変形が期待できる様な応力（ひずみ）領域の拡大）は，異方的なものである。セン断に伴う砂の構造変化は，最大主応力方向にその接触面を増加させ，最小主応力方向に著しい減少を示す。互いに支持し合う様な柱の発生が見られる。（正のダイレタンシー領域において）[5]，構造変化から考えると，硬化は主に最大主応力方向に起こり，その他の方向にはむしろ弱い構造となり，載荷された場合，変形が大きくなるものと思

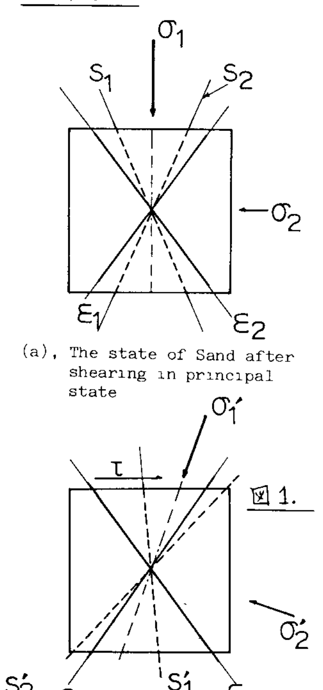
われる。変形が進み正のダイレタンシー領域に入ると，その除荷過程に，塑性的変形が生じ，負のダイレタンシーが生ずる事が実験的に示されている。以上の実験事実に基づけばセン断に伴う硬化領域(以下，その境界を負荷面と記す)は図3に示す様なものと思われる。図3は主応力軸を基軸にとって表現したものであり，偏差応力面に於ける負荷関数の形状；$f(\sigma, K, \alpha)=0$ を示している。ここに σ：応力テンソル，K：等方硬化パラメータ，α：背応力(負荷面の中心を示す。) 又，$F(\sigma, K_f, R(\theta))=0$ は，中間主応力を一定に保った単調載荷試験で得られる破壊面の形状を示し $R(\theta)$は中間主応力の影響を表わすパラメータである。等方硬化理論を用いる時は通常，負荷面は破壊面に相似な形状をもつものと仮定される事が多い。いま，破壊関数により規定される等方硬化パラメータ K を一定に保ち，主応力軸を回転させたものとする。等方硬化理論に基づけば，勿論この様な応力経路に対しては弾性的変形を示す事になる。ところが異方硬化体を考えると，主応力軸は回転により，負荷面は $f_b(\sigma, K, \alpha)=0$ に移動する事になり，その結果生ずる変形は塑性的なものとなる事が予想され，実験事実と一致する事になる。異方硬化理論においては，構造の異方性は，背応力の移動，等方硬化パラメタの動きにより反映される事になる。以上，異方硬化理論を用いれば，主応力方向回転時の塑性的変形挙動が表現される事になる。しかし，現在のところ，負荷面の移動，拡大と構造変化の関係は明確ではない。一つの試みが著者によりなされている。[6]

4. あとがき， 以上，主応力方向回転時の砂の変形挙動について，微視的な観点からはモビライズド面に基づく考察を展開し，巨視的観点からは，移動(等方)硬化理論に基づいて考察した。両者のアプローチは将来において統合されるべきものである。そのためには，ある構造のもとでの，応力増分と構造変化，構造変化とひずみ増分の関係等につき今後研究を続ける必要がある。

5. 参考文献

(1) R.F. Arthur et al.(1980) Proc. of ASCE, GT Vol.106 No 4 (2) 石原 et al. Preprint of U.S. Japan Seminor on Granular Mechanics at Cornell Univ. (1982) (3) 松岡等，ρ9 第17回土質工学研究発表会(1982) (4) Nemat Nasser & Tobita(1982) Mechanics of Materials Vol.1, No 2 (5) 小田，埼大工学部建設基礎工学研究報告 (1976) (6) 飛田，柳沢，第18回土質工学研究発表会 (1983) 投稿予定

6. 参考図



(a), The state of Sand after shearing in principal state

(b); after rotation of principal stress directions.

図1.

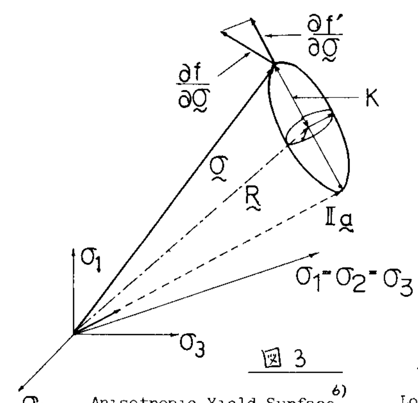


図3

Anisotropic Yield Surface[6]

図1：モビライド面による考察
図2：モビライド面とダイレタンシー角
図3：異方硬化体による考察
(←)：主応力表示による負荷面
(↓)：偏差応力面による負荷面

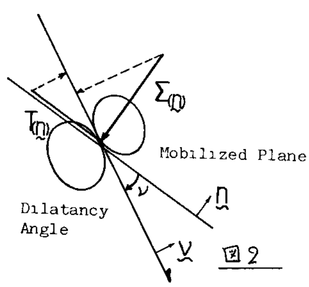


図2

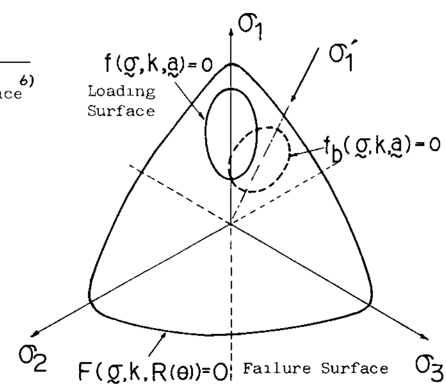


図3 Loading Surface in Deviatoric Stress Space