海浜循環流の非線形解について

八戸工業大学　正会員　佐々木幹夫

1 はじめに

尾崎ら(1977)によると離岸流には純循環流型と自由噴流型の二つのタイプがあり、一つの海浜循環セル内で向岸流と離岸流が同じ幅を占め 同程度の強さになっていれば前者で、それらの非対称性が著しければ後者である。理論的にはBowen(1969)の線形解が前者の離岸流による水平循環を表わし、Tam(1973)の相似解は後者の離岸流を強調した流況を表わしている。佐々木・尾崎(1979)は離岸流間中央の向岸流速を波の質量輸送速度に比例するとの仮定のもとに 両方の離岸流の存在を線形理論で明らかにし、実験との良い一致をみている。

ここでは、自由噴流型離岸流が現われるのは非線形性に因るものではないかとの視点に立ち、摂動法による第二次まで近似解を示す。

2. 基礎方程式

定常状態を考え、各物理量の時間平均をとり、水深方向に平均化すると 海浜流の方程式として次式を得る(Phillips, 1966)。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(h+\bar{\zeta})U_i = 0 \quad \text{-----------} (1)$$

$$u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i(h+\bar{\zeta}) = -g\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho(h+\bar{\zeta})}\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + R_i \quad (2)$$

ここに、h:静水深、$\bar{\zeta}$:平均水位変化高、u_i:平均流、S_{ij}: radiation stress, R_i:抵抗項、ρ:流体密度である。

いま、座標系を図-1のようにとり、流れのx, y成分をu, vとすると式(1)より 輸送流れ関係ψとして、

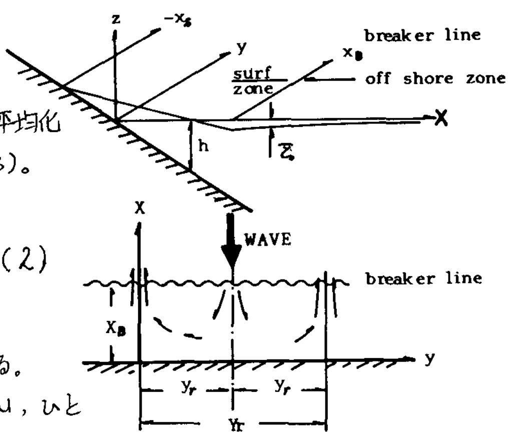

図-1 海浜流の座標系

$$(h+\bar{\zeta})u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (h+\bar{\zeta})v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \text{------} (3)$$

が定義され、直角入射の場合($S_{xy}=S_{yx}=0$)のradiation stress S_{ij}を 土屋ら(1979)の表現で、

$$\left.\begin{array}{l} S_{xx} = \rho g(d+\bar{\zeta}')^2 S_1 \\ S_{yy} = \rho g(d+\bar{\zeta}')^2 S_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{----------} (4) \\ x \le x_B\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} S_{xx} = \rho g d_B^{5/2}(d+\bar{\zeta}')^{-1/2} S_1' \\ S_{yy} = \rho g d_B^{5/2}(d+\bar{\zeta}')^{-1/2} S_2' \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{-----} (5) \\ x \ge x_B\end{array}$$

とおく。ここに、H_Bは砕波波高であり、d, $\bar{\zeta}'$は次のように定義される　$d=h+\bar{\zeta}_0$, $\bar{\zeta}=\bar{\zeta}_0+\bar{\zeta}'$ ---(6)

$\bar{\zeta}_0$は流れのないときの$\bar{\zeta}$で、$\bar{\zeta}'$は流れの発生に伴って生じた$\bar{\zeta}$の変化量である。

式(2)のR_iとして、水平混合によるlateral friction をとり Longuet-Higgins (1970)にならって、次式で表わす

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_x\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad R_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_y\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad \text{----------------} (7)$$

$$\text{ここに、}\quad \varepsilon_x = C_x\frac{d^2}{8\pi^2}\frac{gT}{d}, \quad \varepsilon_y = C_y\frac{d^2}{8\pi^2}\frac{gT}{d} \quad \text{----------------------------} (8)$$

ε_x, ε_yはx, y方向の渦動粘性係数で Thornton (1970)の表現にならった。

無次元量を次のように導入する。

$$\left.\begin{array}{l} d = m(x+\bar{x}_s), \quad X = x+\bar{x}_s, \quad d = d_B\xi, \quad X = \frac{d_B}{m}\xi, \quad y = y_r\eta, \quad u_i = u_i^*\cdot u_0 \\ \bar{\zeta}' = \bar{\zeta}'^* d_B, \quad \psi = \psi^*\cdot u_0 d_B d_B/m \end{array}\right\} \text{----------} (9)$$

ここに、$\bar{\xi}$は汀線の平均後退距離，u_0 は砕波点における離岸流速 である。

式(9)を用い、式(2)を無次元量で表わし、$\bar{\xi}^*$ を消去すると式(5〜8)より次式を得る。

$$R^*\left[\beta^*\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{\xi^2}\lambda\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\lambda\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\cdot\lambda^2\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta^2}\right\}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{-\frac{1}{\xi^2}\lambda\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\cdot\lambda\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta\partial\xi}\right\}\right]$$

$$=-C^*\lambda\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\left\{\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi}\lambda\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\right)\right\}-C^*\lambda\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left\{\xi\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi}\lambda\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\right)\right\}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\right)\right\}$$

$$-\lambda\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\left\{\xi\lambda\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}\right)\right\}+O(\varepsilon^4)\text{ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - (10)}$$

ここに $R^*=(u_0\ d_B/m)/(C_y\frac{P^2}{8\pi^2}\frac{d_B^2}{T})$，$\beta^*=\beta_2/\beta_1$，$\beta_1=1+\begin{Bmatrix}2S_1\\-S_1'/2\end{Bmatrix}$

$\beta_2\ \ 1+\begin{Bmatrix}2S_2\\-S_2'/2\end{Bmatrix}$，$P=T\sqrt{g/d_B}$，$C^*=C_x\beta_2/C_y\beta_1$，$\lambda=X_B/y_r$ - - - - - - - (11)

式(10)は $\epsilon\ll1$ なる微小量で、$\bar{\xi}=\epsilon\bar{\xi}_1+\epsilon^2\bar{\xi}_2+\cdots$，$\psi=\epsilon\psi_1+\epsilon^2\psi_2+\cdots$ と表わせるとき

$\bar{\xi}/d\approx O(\epsilon^2)$ - - - - - (12)　　$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\bar{\xi}}{d}\right)\cdot\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x_i}\approx O(\epsilon^3)$ - - - (砕波帯外) - - - - (13)

なる条件を仮している。式(12)は汀線近傍を除けば満足される。

3．摂動解　いま、ψ^*を次のようにおく

$$\psi^*=\epsilon\psi_1^*+\epsilon^2\psi_2^*\quad,\quad\psi_n^*=X_n(\xi)\sin n\pi\eta\text{ - - - - - - - - - - - - - - - (14)}$$

式(14)を式(10)に代入すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^{2}\epsilon^n L_n(X_n)=\sum_{n=2}^{2}\epsilon^n M_n(X_{n-1})\text{ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - (15)}$$

$$L_n=\frac{d^4}{d\xi^4}-\frac{1}{\xi}\frac{d^3}{d\xi^3}+\left(\frac{2}{\xi^2}-C^*k_n^2-k_n^2\right)\frac{d^2}{d\xi^2}+\left(-\frac{2}{\xi^3}+\frac{1}{\xi}C^*k_n^2\right)\frac{d}{d\xi}+\left(-\frac{1}{\xi^2}C^*k_n^2+C^*k_n^4\right)\text{ - - - - - (16)}$$

$$M_2(X_1)=\frac{1}{2}k_1\frac{d}{d\xi}\left\{-\frac{1}{\xi^2}X_1\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{dX_1}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\right\}(X_1)\text{ - - ここに }k_n=n\pi\lambda\text{ - - (17)}$$

(1)線形解　式(15)より X_n は、$L_n(X_n)=0$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - - (18)

によって与えられる。式(16)より 式(18)の素解は決定方程式の根が $\rho=0$，2(重根)，3であるから

$$\varphi_{1n}=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{nm}\xi^{3+m},\quad\varphi_{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{nm}\xi^{2+m},\quad\varphi_{3n}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{nm}(\rho)(\rho-2)\xi^{\rho+m}\right\}_{\rho=2}$$

$$\varphi_{4n}=\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{nm}(\rho)\rho^3\xi^{\rho+m}\right\}_{\rho=0}\text{ - (19)}$$

ここに、$(\rho+m)(\rho+m-2)^2(\rho+m-3)\alpha_{nm}+(\rho+m-3)\{-(1+C^*)(\rho+m-3)-1\}k_n^2\alpha_{nm-2}+C^*k_n^4\alpha_{nm-4}=0$ (20)

となる。式(20)より、φ_{3n} は$(\log\xi)^2$，φ_{4n}は$(\log\xi)^3$ の項を含まないことになる。汀線で $u^*=v^*=0$ を満足する解は φ_{1n} であり、これが砕波帯内の解となる。砕波帯外の解は $\xi\to\infty$ で有限となる二つの素解と砕波点で u^*，v^* が連続であることより構成できる

(2)非線形解：砕波帯内の解は式(15〜20)より次のようになる。

$$X_n(\xi)=A_{1n}\varphi_{1n}+A_{11}^{n}\sum_{i=1}^{4}\varphi_{im}\int(\Delta_{ni}/\Delta_n)f_n(\xi)d\xi\text{ - - - - - - - - - - - - - - - - (21)}$$

$$\text{ここに、}f_1(\xi)=0\quad,\quad f_2(\xi)=M_2(X_1)\text{ - (22)}$$

式(21)の Δ_n は、式(19)の φ_{1n}，φ_{2n}，φ_{3n}，φ_{4n} で作られるWronskiの行列式で、Δ_{ni} は Δ_n の $\varphi_{in}^{(n-1)}$ の副行列式である。砕波帯外の解は線形解と同様に、$\xi\to\infty$にて有限なる素解と砕波点で u^*，v^* の連続を満たすようにすれば解が求まる。A_{11}，A_{12}は u^*が1になることより決めることができる。

4　おわりに、摂動法により、第2次までの解を求めてみた。式(14)のような摂動展開は第3次近似方程式系で永年項が発生し、この方法は破綻する。沿岸方向に変調をとる多重尺度法が適用されよう。この場合には ϵ^2 毎に多重距離 $\overset{\text{き}}{\pi\lambda}$ とると良いことが本方法より明らかである。 式(21)は複雑な形をしており、式(19)第1式 φ_{1n} の数項からなる試行関数を重みつき残差法で求めた方が計算は容易である。