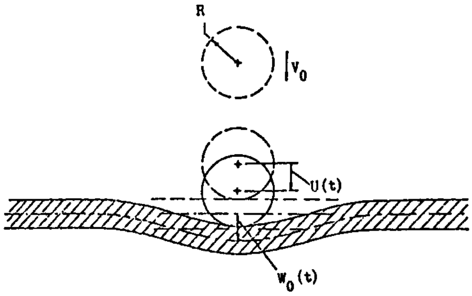
弾性球により衝撃されたはりの初期挙動について

岩手大学工学部　正　員　岩崎　正二
同　上　正　員　出戸　秀明
同　上　学生員　○青井　裕昭

1．まえがき

落体によってはりに生じる応力あるいは変形の挙動は静的な荷重下におけるものと比較して、その様相が異なり工学上興味ある問題である。古くから行なわれている簡略な方法は、衝突前に落体がもっていた運動エネルギーが完全にはりのひずみエネルギーに変換されると考える方法であり、動たわみや動応力の上限値を与える。さらにはりの運動エネルギーまで考慮するとCox あるいはMorleyの式が得られる。しかしながら上に述べた方法は、衝撃の間のはりのたわみ曲線をそれに対応する静たわみ曲線と仮定しているためはりの質量が落体の質量に比べて無視できる場合には十分な結果を与えるが、その他の場合には、はりの横振動方程式や衝撃点における局部的変形を考慮しなければならない。本報告では、剛球がはりに衝突する場合を衝撃荷重を仮定しないで衝撃速度を与え、接触点での局部的変形にHertzの接触理論を適用することにより、衝撃力を定める非線形型積分方程式を導き数値解析を行なったものである。



2．解析理論

無限長はり上に剛球が落下した時に接触点において作用する衝撃力を求める。はりのたわみの横振動方程式は初等理論を用いて表わすと、

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial X^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \quad (1)$$

ここで、EI ははりの曲げ剛性、ρ は単位体積質量、A は断面積、w は任意点のたわみを表わす。又、剛球の運動方程式は、球の質量をM 、球のはりへのくいこみをδとすると次式のようになる。

$$M(\ddot{w}_0+\ddot{\delta})=-P(t) \quad (2)$$

ただし、w_0は衝撃点におけるたわみである。　$\ddot{\ }=\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

一方、Hertz の接触理論よりP とδの関係を次式のように仮定する。

$$\delta=kP^{\frac{2}{3}} \quad (3)$$

ただし　$k=\sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16}\frac{(k_1+k_2)^2}{R}}$,　$k_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}$,　$k_2=\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$

V_1, V_2, E_1, E_2はそれぞれはりと剛球のポアソン比とヤング率を表わす。R は剛球の半径を表わす。式(2)を解くと球の変位 u (t)は

$$u=w_0+\delta=-\frac{1}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)d\tau+v_0 t \quad (4)$$

ただし、v_0は剛球の初速度を表わす。

次に式(1)を接触点について解くと、接触点でのたわみw_0とモーメントM_0は

$$W_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho Aa}\int_0^t P(\tau)\sqrt{t-\tau}\,d\tau \quad (5)$$

$$M_0(t)=\frac{a}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{P(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \quad (6)$$

ここで　$a=\sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}$

式(3),(5)を式(4)に代入すると衝撃力P を定める次のような非線型積分方程式を得る。

$$k\,P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho Aa}\int_0^t P(\tau)\sqrt{t-\tau}\,d\tau + \frac{1}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)d\tau = v_0 t \qquad (7)$$

同様にして単純ばりに剛球が衝突する場合には Timoshenkoによると

$$k\,P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{2}{\rho AL}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\int_0^t P(\tau)\frac{\sin\alpha_m(t-\tau)}{\alpha_m}d\tau + \frac{1}{M}\int_0^t P(\tau)(t-\tau)d\tau = v_0 t \qquad (8)$$

ここで、$\alpha_m=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$, L ははりの長さを表わす。

単純ばりにおける衝撃点でのモーメントは

$$M_0(t) = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\int_0^t P(\tau)\sin\alpha_m(t-\tau)d\tau \qquad (9)$$

式(7),(8)より求めた衝撃力 P (t)をそれぞれ式(6),(9)に代入することにより衝撃点でのモーメントを求めることができる。

3. 数値計算例

数値計算は無限長はりに剛球が衝突する問題を扱った。又、計算には次の数値を用いた。

はり寸法: 2.5 cm × 2.5 cm　1
4.0 cm × 4.0 cm　2
5.0 cm × 5.0 cm　3

$E_1 = E_2 = 2.2\times10^6$ (kg /cm²)

$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

$\rho = 0.801\times10^{-5}$ (kg・sec²/cm⁴)

球の半径: R = 2 cm, M =263.05g

落下高さ: h = 1 m, k =5.774 ×10^{-5}

図—1 は衝撃力の時間的変動を表わしたものであり、図—2 ははりの衝撃点での応力の時間的変動を示したものである。

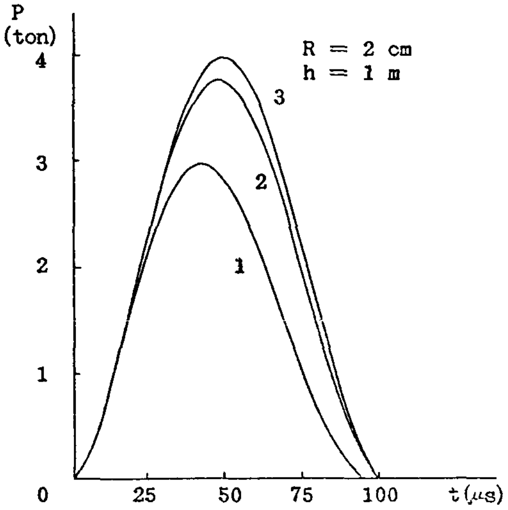


図 — 1

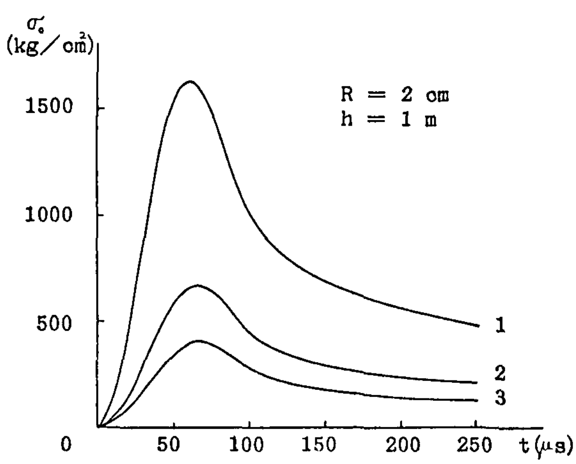


図 — 2

参考文献

W.H.HOPPMANN,BALTIMORE : Impact of Mass on a Damped Elastically Supported Beam,Journal of Applied Mechanics, JUNE, 1948

K.E.BARNHART,WERNER GOLDSMITH : Stress in Beams During Transrerse Impact, Journal of Applied Mechanics, SEPT, 1957

小高忠男, 中原一郎:弾性棒で衝撃された無限長はりの応力, 日本機械学会論文集 1967,4

岩崎正二, 能町純雄:弾性球による無限長はりの横衝撃について, 第37回土木学会全国大会講演概要集, P405

チモシエンコ:工業振動学

日高考次:数値積分法