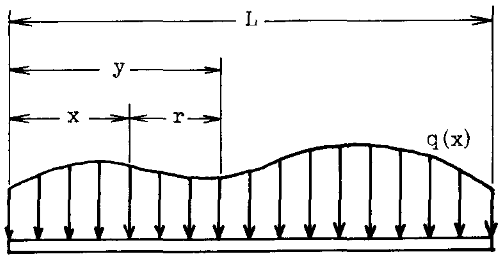
積分方程式によるはりの解法

岩手大学工学部　正員　○出戸　秀明
同　正員　宮本　裕
同　正員　岩崎　正二

図ー1 に示すはりの微分方程式は、$EI d^4 w(x) / dx^4 = q(x)$ ······ (1)で与えられる。
いま無限長はりに対して、

$$EI \frac{d^4 w^*(x,y)}{dx^4} = \delta(x,y) \qquad \delta：デルタ関数 \cdots\cdots (2)$$

で定義される2点関数を導入する。このとき$w^*(x,y)$ は無限長はりの1点y に単位荷重が作用するときの点x でのたわみである。ここで式(1)の両辺に基本解$w^*(x,y)$ をかけ、はりのスパンLにわたって積分し、



図ー1

$$\int_0^L EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} w^*(x,y)\,dx = \int_0^L q(x) w^*(x,y)\,dx \cdots\cdots (3)$$

これをwの微係数がなくなるまで4回部分積分する

$$\Big[-w^*(x,y)Q(x) + \theta^*(x,y)M(x) - M^*(x,y)\theta(x) + Q^*(x,y)w(x) \Big]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L w(x)\ EI \frac{d^4 w^*(x,y)}{dx^4} dx$$

$$= \int_0^L q(x) w^*(x,y)\,dx \cdots\cdots\cdots (4) \qquad ただし、\theta = \frac{dw}{dx},\ M = -EI\frac{d^2 w}{dx^2},\ Q = -EI\frac{d^3 w}{dx^3},$$

$$\theta^*(x,y) = \frac{dw^*(x,y)}{dx},\ M^*(x,y) = -EI\frac{d^2 w^*(x,y)}{dx^2},\ Q^*(x,y) = -EI\frac{d^3 w^*(x,y)}{dx^3}$$

式(4)の左辺最後の積分項に式(2)を代入しデルタ関数の性質を考慮すれば、点yでのたわみが求められる。

$$w(y) = \Big[w^*(x,y)Q(x) - \theta^*(x,y)M(x) + M^*(x,y)\theta(x) - Q^*(x,y)w(x) \Big]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L q(x) w^*(x,y)\,dx \cdots\cdots (5)$$

さらに式(5)を微分すると

$$\theta(y) = \Big[\widetilde{w}^*(x,y)Q(x) - \widetilde{\theta}^*(x,y)M(x) + \widetilde{M}^*(x,y)\theta(x) - \widetilde{Q}^*(x,y)w(x) \Big]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L q(x) \widetilde{w}^*(x,y)\,dx \cdots\cdots (6)$$

式(5),(6)において$y \to 0, y \to L$ の場合を考え、e を微小な正定数とすると

$$\begin{Bmatrix} w(e) \\ w(L-e) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} w^*(L,e) & -\theta^*(L,e) & M^*(L,e) & -Q^*(L,e) \\ w^*(L,L-e) & -\theta^*(L,L-e) & M^*(L,L-e) & -Q^*(L,L-e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(L) \\ M(L) \\ \theta(L) \\ w(L) \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} w^*(0,e) & -\theta^*(0,e) & M^*(0,e) & -Q^*(0,e) \\ w^*(0,L-e) & -\theta^*(0,L-e) & M^*(0,L-e) & -Q^*(0,L-e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ \theta(0) \\ w(0) \end{Bmatrix}$$

$$+ \int_0^L \begin{Bmatrix} q(x) w^*(x,e) \\ q(x) w^*(x,L-e) \end{Bmatrix} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta(e) \\ \theta(L-e) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{w}^*(L,e) & -\widetilde{\theta}^*(L,e) & \widetilde{M}^*(L,e) & -\widetilde{Q}^*(L,e) \\ \widetilde{w}^*(L,L-e) & -\widetilde{\theta}^*(L,L-e) & \widetilde{M}^*(L,L-e) & -\widetilde{Q}^*(L,L-e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(L) \\ M(L) \\ \theta(L) \\ w(L) \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \widetilde{w}^*(0,e) & -\widetilde{\theta}^*(0,e) & \widetilde{M}^*(0,e) & -\widetilde{Q}^*(0,e) \\ \widetilde{w}^*(0,L-e) & -\widetilde{\theta}^*(0,L-e) & \widetilde{M}^*(0,L-e) & -\widetilde{Q}^*(0,L-e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ \theta(0) \\ w(0) \end{Bmatrix}$$

$$+ \int_0^L \begin{Bmatrix} q(x) \widetilde{w}^*(x,e) \\ q(x) \widetilde{w}^*(x,L-e) \end{Bmatrix} dx \cdots\cdots\cdots (8)$$

式(7),(8)において$e \to 0$の極限を考えることにより境界における4個の方程式が得られ、境界条件により規定される境界量(4個)を考慮すると、はりの問題が解けることになる。

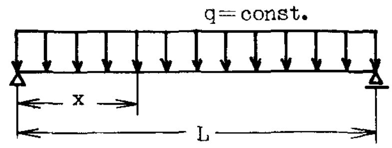
なお剛性マトリックスの誘導は次のようにしてできる。上式において$e \to 0$として、並べ換えてからまとめると、

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta(0) \\ \delta(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X(L) \\ \delta(L) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X(0) \\ \delta(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ここで} \quad \delta = \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix}, \; X = \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix}$$

となる。A_{11}, A_{22}は単位マトリックスである。これより次の式を得る。

$$\begin{bmatrix} C_{12} - A_{11} & B_{12} \\ -C_{22} & B_{22} - A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta(0) \\ \delta(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{11} & B_{11} \\ -C_{21} & B_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X(0) \\ X(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}$$

これから剛性マトリックスは容易に誘導される。



図－2

例として図－2 のような、等分布荷重の載ったけたを考える。式(7),(8)において、$e=0$, $q(x)=q$とし、境界条件より$w(0)=w(L)=0$, $M(0)=M(L)=0$を代入し、基本解より求められる各項を計算すると以下のようになる。ここで、基本解は、

$w^*(x,y) = (2L^3 + r^3 - 3Lr^2)/12EI$　　　$\widetilde{w}^*(x,y) = -r(r-2L)/4EI \cdot \mathrm{sgn}(x-y)$

$\theta^*(x,y) = r(r-2L)/4EI \cdot \mathrm{sgn}(x-y)$　　　$\widetilde{\theta}^*(x,y) = -r(r-L)/2EI$

$M^*(x,y) = -(r-L)/2$　　　$\widetilde{M}^*(x,y) = 1/2 \cdot \mathrm{sgn}(x-y)$

$Q^*(x,y) = -1/2 \cdot \mathrm{sgn}(x-y)$　　　$\widetilde{Q}^*(x,y) = 0$

ただし、$r=|x-y|$, $x>y$のとき$\mathrm{sgn}(x-y)=1$, $x<y$のとき$\mathrm{sgn}(x-y)=-1$とする。

これより式(7),(8)は、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L^3/6EI & L/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} L^3/6EI & L/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(0) \\ \theta(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5qL^4/48EI \\ 5qL^4/48EI \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L^2/4EI & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -L^2/4EI & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q(0) \\ \theta(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qL^3/6EI \\ -qL^3/6EI \end{Bmatrix}$$

これらを解くと、$Q(L)=-qL/2$, $Q(0)=qL/2$, $\theta(L)=-qL^3/24EI$, $\theta(0)=qL^3/24EI$ が求められる。

さらに、弾性床上のはりについて微分方程式は、$EId^4w(x)/dx^4 + kw(x) = q(x)$ ・・・・・・・・・ (9) 、基本解 $w^*(x,y)$ は $EId^4w^*(x,y)/dx^4 + kw^*(x,y) = \delta(x,y)$ ・・・・・・・・・ (10) で定義される。

これを上述のはりの場合と同じく、式(9)の両辺に $w^*(x,y)$をかけ、スパンLにわたって積分し、wの微係数がなくなるまで4回部分積分したものが下式である。

$$\Big[-w^*(x,y)Q(x) + \theta^*(x,y)M(x) - M^*(x,y)\theta(x) + Q^*(x,y)w(x) \Big]_{x=0}^{x=L} + \int_0^L w(x) \left[EI\frac{d^4w^*(x,y)}{dx^4} + kw^*(x,y) \right] dx = \int_0^L q(x)w^*(x,y)\,dx$$

これに式(10)を代入し、デルタ関数の性質を考慮すれば、式(5)と同じになる。つまり基本解が異なるだけで、上述のはりの場合と同様にして、弾性床上のはりの問題が解けることになる。

参 考 文 献

1) 田中正隆・田中喜久昭：境界要素法－基礎と応用，丸善，(1982)

2) 土木学会編：構造力学公式集