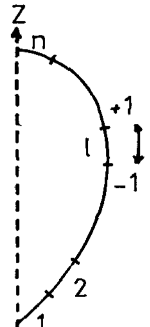
境界要素法による回転体のねじり応力解析

岩手大学工学部　正　員　　宮　本　　裕

1．まえがき

近年，境界要素法（Boundary Element Method, BEM）という解法が工学上の種種の問題に応用され，従来の領域型解法とならんで構造解析の有力な解法となりつつある。境界要素法は，場の支配微分方程式をGreenの公式を用いて境界上の積分方程式に変換し，これに有限要素法と同様の離散化を施して数値解を求める。この解法によれば，最終的に解くべき方程式系には境界上の節点変位が含まれるだけであり差分法や有限要素法などの領域型解法と比較して，入力データ数や計算時間を大幅に短縮できるようになる。ここではノッチを有する棒状の回転体のねじり応力解析を例にとり，境界要素法の解法の説明をする。

2．解析理論



図－1

3次元の場合に，境界積分方程式の出発方程式は相反法則としても理解され次式のようになる。

$$\int_{\Omega}(t_i^{I}v_i^{II}-t_i^{II}v_i^{I})\,d\Omega=0 \tag{1}$$

ここでΩは表面積を表わし，t_i^{I}，t_i^{II}は表面力，v_i^{I}，v_i^{II}はそれに対する変位である。システムⅠを既知として，システムⅡは式（1）より解けるという意味である。式（1）より，ねじり荷重を受ける回転体では境界積分方程式は次式のように誘導される。

$$c(P)\,v(P)+\int_{\Omega}T(P,Q)\,v(Q)\,d\Omega=\int_{\Omega}V(P,Q)\,t(Q)\,d\Omega \tag{2}$$

表面力t，表面変位vも回転体の性質を適用して，表面積分は子午線Cの方向に線積分をすることに還元され次のようになる。

$$c(P)\,v(P)+2\pi\int_{c}T(P,Q)\,v(Q)\,r(Q)\,ds=2\pi\int_{c}V(P,Q)\,t(Q)\,r(Q)\,ds \tag{3}$$

ここでv（Q）は境界変位，t（Q）は境界応力で，r（Q）は半径，dsは子午線Cに沿った微小要素である。またT（P,Q），V（P,Q）は次のようになる。

$$T(P,Q)=\frac{1}{4\pi^2\rho^2e^2}\Big[\Big\{\frac{3}{2}\sqrt{(e+\rho)^2+\tilde{z}^2}\,n_r+\frac{e^2+\rho^2+\tilde{z}^2}{((e-\rho)^2+\tilde{z}^2)\sqrt{(e+\rho)^2+\tilde{z}^2}}\Big((\rho^2-e^2+\tilde{z}^2)\frac{n_r}{2}-e\tilde{z}n_z\Big)\Big\}E\Big(\frac{\pi}{2},\varkappa\Big)+\frac{e\tilde{z}n_z-(e^2+2\rho^2+2\tilde{z}^2)\,n_r}{\sqrt{(e+\rho)^2+\tilde{z}^2}}K\Big(\frac{\pi}{2},\varkappa\Big)\Big] \tag{4}$$

$$V(P,Q)=\frac{1}{4\pi^2\rho^2eG}\Big\{\frac{e^2+\rho^2+\tilde{z}^2}{\sqrt{(e+\rho)^2+\tilde{z}^2}}K\Big(\frac{\pi}{2},\varkappa\Big)-\sqrt{(e+\rho)^2+\tilde{z}^2}\,E\Big(\frac{\pi}{2},\varkappa\Big)\Big\} \tag{5}$$

ここで $\varkappa=\sqrt{\frac{4e\rho}{(e+\rho)^2+\tilde{z}^2}}$ であり，$K(\frac{\pi}{2},\varkappa)$，$E(\frac{\pi}{2},\varkappa)$ は楕円積分の公式を用いて表わされる。すなわち

$$K\Big(\frac{\pi}{2},\varkappa\Big)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}\ ,\quad E\Big(\frac{\pi}{2},\varkappa\Big)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}\,d\psi \tag{6}$$

式（3）を解いてv（Q），t（Q）を計算するには，積分方程式を離散化して数値解法として計算するのが有効な方法である。有限要素法のように子午線曲線Cをn個の要素に分ける。その各要素について，それぞれ境界応力v（ξ），境界変位t（ξ）を次のように多項式で近似する。

$$v(\xi)=\sum_{m=1}^{q}M_m(\xi)\,v_m,\quad t(\xi)=\sum_{m=1}^{q}M_m(\xi)\,t_m \tag{7}$$

ここで1次式近似の場合mは2まで，2次式近似の場合はmは3までとする。また $-1\leqq\xi\leqq1$ でξは離散的に6ないし7個の値をとる。そうすると式（3）は次のようになる。

$$c(P^g)\,v(P^g)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{q}v_{ml}\int_{S_l}T(P^g,\xi)\,M_m(\xi)\,2\pi r(\xi)\,J_l(\xi)\,d\xi=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{q}t_{ml}\int_{S_l}V(P^g,\xi)\,M_m(\xi)\,2\pi r(\xi)\,J_l(\xi)\,d\xi \tag{8}$$

ここで局所座標ξについて積分するから，全体座標に変換するためヤコブ関数J（ξ）をかけている。

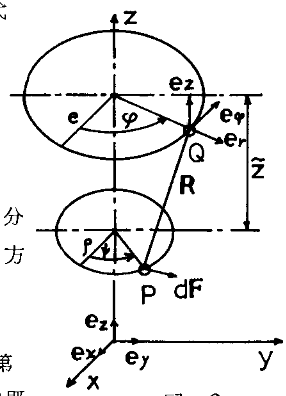
$r(\xi)$, $z(\xi)$, $J_l(\xi)$ は直線要素か曲線要素に応じて,それぞれの場合の式が与えられる。また局所座標 ξ についての積分には,次のようなガウスの積分公式を用いる。

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(\xi_i) \qquad (9)$$

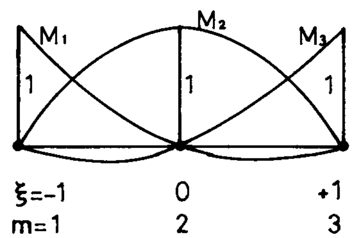
ここで H_i は重み関数であり, $f(\xi_i) = T(P,\xi)\, M(\xi)\, 2\pi r(\xi) \times J(\xi)$ または $V(P,\xi)\, M(\xi)\, 2\pi r(\xi)\, J(\xi)$ である。nは普通 6で十分である。すべての節点Nに点Pをあてはめ,式 (8) を適用させると次のN元連立方程式が得られる。

$$[A]\{v\} = [B]\{t\} \qquad (10)$$

この連立方程式は境界条件により,第一種境界値問題（全境界の応力既知）,第二種境界値問題（全境界の変位既知）,第三種境界値問題（一部の境界で応力既知,他の境界で変位既知）に分類される。いずれの場合にも,右辺に既知数を,左辺に未知数を配置した方程式に変換して,この方程式を解く。この場合,有限要素法と異なり方程式の係数マトリックスは非対称となることに注意する。v,tが決定されると,境界表面せん断応力は次の式から計算される。



図－2



図－3

$$\tau_{s\varphi} = G\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{r'}{r} v\right) \qquad (11)$$

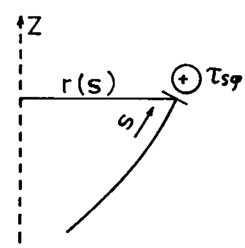
ここで $\frac{\partial v_l}{\partial s} = \left(\sum_{m=1}^{q} v_{ml} \frac{dM_m(\xi)}{d\xi}\right) \frac{1}{J_l(\xi)}$, $r' = \frac{dr}{ds}$

である。

3. 数値計算例

数値計算例の詳細は別の機会にゆずる。

この研究は昭和56年10月1日から57年9月30日まで,西ドイツアレキサンダー・フォン・フンボルト財団の研究員として,ダルムシュタット工科大学ゼーガ教授のもとで研究したものの一部である。同財団とゼーガ教授に感謝する。



図－4

参考文献

(1) 田中正隆・田中喜久昭：境界要素法－基礎と応用,丸善　1982

(2) Brebbia,C. A　：The Boundary Element Method for Engineers,Pentech Press,London (1978)　：邦訳　神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭,境界要素法入門,培風館 (1980)

(3) Brebbia,C. A. and Walker,S. ：Boundary Element Techniques in Engineering, Butterworth,London, (1980)　：邦訳　神谷 紀生・田中正隆・田中喜久昭,境界要素法の基礎と応用,培風館 (1981)

(4) Hoffmann,M. ：Untersuchung der Spannungskonzentration Gekerbter Tordierter Wellen mit Hilfe der Randelementmethode,Diplomarbeit im Fachbereich Mechanik der Technischen Hochschule Darmstadt (1981)

(5) Miyamoto,Y. ,Hoffmann,M. und Seeger,T. ：Untersuchung der Spannungskonzentration rotationssymmetrischer Kreuzstösse unter Torsion mit Hilfe der Randelementmethode, Forschungsbericht FF－8 Fachgebiet Werkstoffmechanik Technische Hochschule Darmstadt (1982)