砂のせん断時におけるポアソン比

八戸工大　諸戸靖史

三軸圧縮試験におけるロウの応力・ダイレイタンシー式は

$$-\frac{d\varepsilon_1}{2d\varepsilon_3} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi_f}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right) = K_a\cdot\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) \tag{1}$$

ここに　$K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi_f}{2}\right)$　(2)

ここで，式(1)は接線ポアソン比(current poisson's ratio, instantaneous poisson's ratio)を与える。これは

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = \frac{K_a}{2}\cdot R \qquad R = \frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} \tag{3}$$

となる。この式からポアソン比νについて次のような基本的な性質をえる。

1) νは極限値をもつ(なぜならば，σ_1'/σ_3'は破壊時において最大値を示す)。そして，発揮するせん断強さが大きくなる程νは増大する。

2) 粒子間摩擦角ϕ_μが大きい程νの値は小さくなる。ここで　ϕ_fとϕ_μの間には　$\tan\phi_f = K\cdot\tan\phi_\mu$　(K：係数)なる関係がある。

次に，割線ポアソン比(secant poisson's ratio)を求めてみる。これは

$$\bar{\nu} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \tag{4}$$

として定まる。この$\bar{\nu}$を計算するには応力・ひずみ曲線を仮定しなければならない。式(1)を書き直すと

$$d\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}K_a\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)d\varepsilon_1 \tag{5}$$

となる。いま，軸ひずみε_1が応力比σ_1'/σ_3'の関数で表わされるという砂のような材料に対する妥当な仮定を置くと

$$\varepsilon_1 = f(\sigma_1'/\sigma_3') = f(R) \tag{6}$$

ここで，$f(R)$の関数形をRに関する非線形が加味できるように

$$f(R) = G\{R^n - R_0^n\} \tag{7}$$

G：変形係数，R_0：初期定数，n：ベキ乗数　としよう。いま，せん断が等方圧縮状態から出発する場合には

$$R_0 = 1 \tag{8}$$

となる。K_0状態から出発する時には

$$R_0 = 1/K_0 \tag{9}$$

となる。ここで　K_0：静止土圧係数

等方圧縮状態からせん断が出発する場合

$$d\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}K_a\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)f'\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)d\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right) = -\frac{1}{2}K_aG R\cdot f'(R)\,dR \tag{10}$$

式(10)の右辺は完全微分となり，積分経路にかかわらず積分ができ

$$\varepsilon_3 = -\frac{K_a}{2}\cdot G\cdot\frac{n}{n+1}\left\{\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)^{n+1}-1\right\} = -\frac{K_a}{2}\cdot G\cdot\frac{n}{n+1}\left\{R^{n+1}-1\right\} \tag{11}$$

したがって，式(4)の $\bar{\nu}$ は

$$\bar{\nu} = K_a\,\frac{n}{2(n+1)}\,\frac{\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)^{n}-1} = \frac{n\,K_a}{2(n+1)}\,\frac{R^{n+1}-1}{R^{n}-1} \tag{12}$$

$n=1$ について

$$\bar{\nu}_1 = \frac{1}{4}K_a\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+1\right) = \frac{1}{4}K_a\,(R+1) \tag{13}$$

$n=2$ について

$$\bar{\nu}_2 = \frac{1}{3}K_a\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+\frac{1}{\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+1}\right) = \frac{1}{3}K_a\left(R+\frac{1}{R+1}\right) \tag{14}$$

表-1　ν, $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ の値

	$\phi_f = 23°$			$\phi_f = 26°$			$\phi_f = 33°$		
σ_1'/σ_3'	ν	$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$	ν	$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$	ν	$\bar{\nu}_1$	$\bar{\nu}_2$
1	0.245	0.245	0.245	0.195	0.195	0.195	0.147	0.147	0.147
2	0.490	0.368	0.381	0.390	0.293	0.304	0.295	0.221	0.229
3	0.735	0.490	0.531	0.586	0.390	0.423	0.442	0.295	0.319
4				0.781	0.488	0.547	0.590	0.369	0.413
5							0.737	0.442	0.508

表-1から分かることは

3) 接線ポアソン比 ν は割線ポアソン比 $\bar{\nu}$ よりも非常に大きい。

4) 応力・ひずみ曲線の非線形性の程度（n の値）によって $\bar{\nu}$ の値はほとんど変化をしない。したがって $n=1$ とした方が簡単である。

次に K_0−圧縮状態からせん断が出発する場合には

$$\bar{\nu} = K_a\cdot\frac{\frac{n}{2(n+1)}\left[\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{K_0}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}\right)^{n}-\left(\frac{1}{K_0}\right)^{n}} = \frac{K_a\frac{n}{2(n+1)}\left[R^{n+1}-\left(\frac{1}{K_0}\right)^{n+1}\right]}{R^{n}-\left(\frac{1}{K_0}\right)^{n}} \tag{15}$$

$n=1$ の場合は

$$\bar{\nu}_1 = \frac{K_a}{4}\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+\frac{1}{K_0}\right) = \frac{K_a}{4}\left(R+\frac{1}{K_0}\right) \tag{16}$$

$n=2$ の場合は

$$\bar{\nu}_2 = \frac{K_a}{3}\left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+\frac{\left(\frac{1}{K_0}\right)^2}{\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'}+\frac{1}{K_0}}\right) = \frac{K_a}{3}\left(R+\frac{\left(\frac{1}{K_0}\right)^2}{R+\frac{1}{K_0}}\right) \tag{17}$$

5) K_0−圧縮からせん断が出発する場合でも，$n=1$，$n=2$ における $\bar{\nu}_1$ と $\bar{\nu}_2$ の異り方は小さい

6) 等方圧縮から出発する場合と K_0 圧縮から出発する場合では，K_0 圧縮から出発する場合の方が $\bar{\nu}$ の値が大きい。

ここで　$K_0 = 1-\sin\phi'$

という関係を用いると式(16)は

$$\bar{\nu}_f = \frac{K_a}{4}\cdot\frac{2+\sin\phi'}{1-\sin\phi'} \tag{18}$$

$\bar{\nu}_f$ は破壊時のポアソン比である。