

粒状体の構造パラメーターに関する統計論的考察

東北大学工学部 岸野佑次

1. まえがき

粒状体力学を構成するには粒状体のもつ微視構造を何らかの構造パラメーターによって表現することが必要となる。粒子配列の構造パラメーターとしては空隙を表すパラメーターが最も重要なものであるが、粒状体のもつ異方向性を表現するためには更に異方向度を表すパラメーターが必要となる。この異方向性を表すために従来接触角分布を基にしたパラメーターが多く用いられているが、粒子の微視構造を表現するためには充分なものではないように思われる。本文においては粒子の重心間を結ぶリンクに着目した構造パラメーターを新たに定義し、若干の考察と解析例を示し、このパラメーターの有用性を示した。

2. 構造テンソルの定義

二次元の場合について説明する。図-1 に示した粒子の集合（粒子形状、粒径は任意）において、各粒子の重心を結ぶリンクより成るグラフについて考える。図中、 $l_{\alpha i}$ ($i=1, 2$) は応力の伝達に関与するリンクの線素ベクトル、 A は境界のリンクに囲まれた領域 Ω の面積を表す。この粒子の集合について構造テンソル F_{ij} は次式で定義される。

$$F_{ij} = \frac{1}{A} \left(\sum_{\alpha} l_{\alpha i} l_{\alpha j} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} l_{\alpha i} l_{\alpha i} \delta_{ij} \right) \quad (1)$$

上式において、 \sum_{α} 、 $\sum_{\alpha} l_{\alpha i} l_{\alpha j}$ は、それぞれ Ω 、 $\partial\Omega$ (Ω の境界線) に含まれるリンクについて和をとることを示す。境界上の和に因りて、 $\frac{1}{2}$ と乗じて減ずる理由は、境界上のリンクが隣接する二つの領域に含まれるためである。

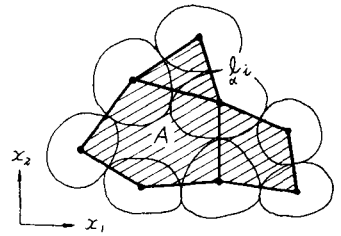


図-1 粒子重心を結ぶリンク

簡単な粒子配列について (1) 式で定義される構造テンソルの計算例を示せば図-2 のようになる。同図 (a) に示されるように F_{ij} は正交配列の場合に単位テンソルとなる。(b) のようにリンク数が少なくなると (a) の半分、構造テンソルの成分も小さくなる (0.5)。(c) は x_1 、 x_2 方向に、それぞれ (b)、(a) と同一のリンク数があるので、テンソルの成分の値も、それぞれ (b)、(a) と同一の値となっており、この場合は異方向性を示している。正交配列より密な (d) の配列においては、テンソルの成分の値が 1 より大となる。このように (1) 式で定義される構造テンソルは、方向性と加味したリンクの密度を与えるものと考えられる。(a) ~ (d) の配列について、これらの各々の図形と隣接し並べた連続図形についての構造テンソルは、(1) 式で計算する限り、図-2 と同一の値を与える。このことは、(1) 式の定義が計算の対象とする領域の大きさ (粒子の個数) に依存しない不変な量を与えるものであることを示している。また、相似な粒子配列の構造テンソルは等しいことも容易に分かる。

3. 構造テンソルに関する考察

F_{ij} は、粒子数の充分大きな集合に適用した場合、リンク線素ベクトル成分間の相乗平均と単位面積当りの密度として表したものである。従って、

$$F_{ij} = n_i n_j F_{ij} \quad (n_i: \text{方向余弦}) \quad (2)$$

により与えられる量は、 n_i ($n_1 = \cos \theta$, $n_2 = \sin \theta$) 方向の投影された

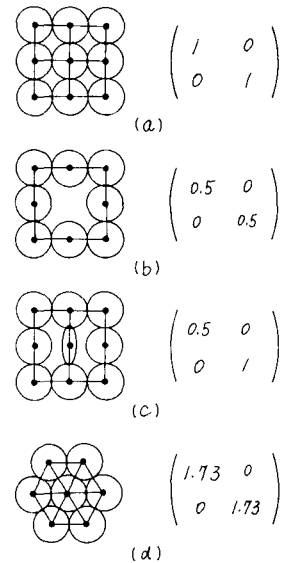


図-2 F_{ij} の計算例

リンクの密度を表す。境界が円形である場合には

$$\frac{1}{A} \sum_{\alpha} l_{\alpha} l_{\alpha} = c I_{ij} \quad (I_{ij} \text{は単位テンソル}) \quad (3)$$
 と考えれば、 F_{ij} の偏差部分は

$$F'_{ij} = \frac{1}{A} \sum_{\alpha} l_{\alpha} l_{\alpha} \quad (4)$$

の偏差部分に等しい。また、充分大きな円形領域 Ω を用い、この Ω の内部に含まれるリンクを対象とすることとすれば、 $F'_{ij} \approx F_{ij}$ と考えればよい。これより三次元の場合への拡張として、

$$F_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} l_{\alpha} l_{\alpha} \quad (5)$$

(α は球領域 Ω 一体積 V に含まれるリンク) を定義して良いと考えられる。

いま、粒状体を構成する粒子自身は弾性体であるとする。リンクの密度が大であれば剛性が大であると考えられるが、ここで、(2)式の F_{ij} が n_i 方向の外力が作用に対する剛性に比例した量であると仮定する。このとき、応力 σ_{ij} (圧縮正) が作用した場合の粒状体の弾性体積歪は次式で与えられる。

$$\epsilon_v = k \int \frac{n_i n_j \sigma_{ij}}{n_{\alpha} m_{\alpha} F_{\alpha\alpha}} d\theta \quad (k: \text{定数}) \quad (6)$$

いま、ある応力状態に対し微小体積歪変化 $\delta F_{\alpha\alpha}$ を与えたとき、 ϵ_v の変化は

$$\delta \epsilon_v = -k \int \frac{n_i n_j n_{\alpha} n_{\alpha}}{(n_{\alpha} m_{\alpha} F_{\alpha\alpha})^2} d\theta \sigma_{ij} \delta F_{\alpha\alpha} \quad (7)$$

となる。この式は、 $F_{\alpha\alpha}$ の増大により、 ϵ_v が減少することを示している。粒状体における変形は一般に可能な限り弾性変形を押しやる方向に進行すると考えられるので、 $F_{\alpha\alpha}$ は増大する傾向にあるものと思われる。

(7)式において、特に $F_{\alpha\alpha}$ が等方テンソルとなっている場合には、 $\sigma_{ij} = p I_{ij} + \sigma'_{ij}$ と用いれば

$$\delta \epsilon_v = -p k \left\{ \delta F_{\alpha\alpha} + \frac{\sigma'_{ij}}{p} \delta F_{ij} \right\} \quad (8)$$

と変形することが出来る。

4. 弾性実験結果への応用例

図-3に示すような弾性粒状体モデルによる剪断試験結果^{*}について応用した例を 図-4, 5 に示す。図-5の $(F_{12})_{\max}$ は異方度を表してあり、図-3の荷重- γ 曲線のピーク ③ までは著しく増大しているが、それ以降の塑性流動状態においては殆ど増加が見られないことが注目される。

実験並びに計算に関しては本学大学院生熊坂博夫君の世話に任じた。ここに謝意を表します。

^{*} 熊坂・佐武・新関「粒状体における応力と歪増分テンソルの共軸性について」第36回土学会年講 Ⅱ-2 S.56 p3~4

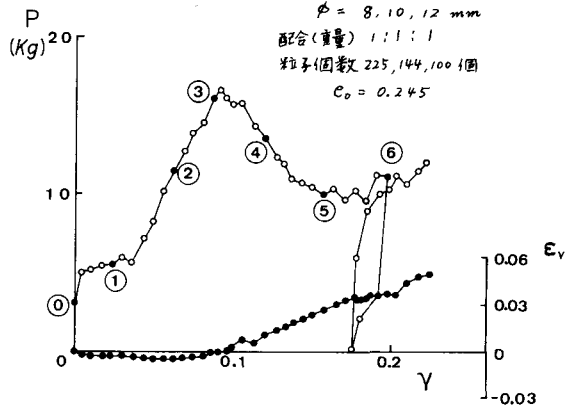


図-3 剪断試験結果

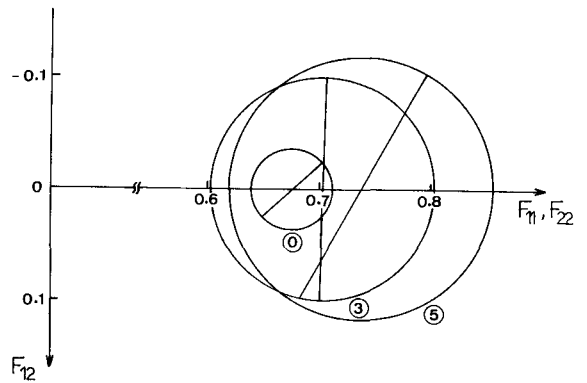


図-4 F_{ij} のモールの表示

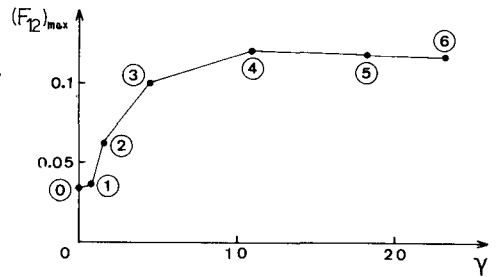


図-5 $(F_{12})_{\max}$ と剪断歪の関係