長波の海底摩擦による減衰

東北大学　正会員　後藤智明

1. 水平床上の長波の層流解

非圧縮性流体の二次元運動を考える。静水面上にx軸、鉛直上方にz軸を採用する。いま、水平および鉛直方向の特性長をそれぞれl_0, h_0とおき、運動の大きさを表わす量としてη_0を用いると、運動は次のように無次元化できる。

$$x=l_0X,\ z=h_0Z,\ t=\frac{l_0}{c_0}T,\ u=\frac{\eta_0}{h_0}c_0U,\ w=\frac{\eta_0}{l_0}c_0W,$$

$$p=\rho g h_0 P,\ \eta=\eta_0 N,\ h=h_0 H \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ただし、$C_0=\sqrt{gh_0}$である。さらに、

$$\epsilon=\frac{\eta_0}{h_0},\ \sigma=\frac{h_0}{l_0},\ Re=\frac{C_0 l_0}{\nu} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

なるパラメタを用いると、無次元化された支配方程式は、

$$\epsilon\frac{\partial U}{\partial X}+\epsilon\frac{\partial W}{\partial Z}=0 \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\epsilon\frac{\partial U}{\partial T}+\epsilon^2U\frac{\partial U}{\partial X}+\epsilon^2W\frac{\partial U}{\partial Z}+\frac{\partial P}{\partial X}=\frac{\epsilon}{Re}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\epsilon}{Re\cdot\sigma}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}$$

$$\sigma\left[\epsilon\frac{\partial W}{\partial T}+\epsilon^2U\frac{\partial W}{\partial X}+\epsilon^2W\frac{\partial W}{\partial Z}\right]+1+\frac{\partial P}{\partial Z}=\frac{\epsilon\cdot\sigma}{Re}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\epsilon}{Re}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$Z=\epsilon N \text{ で } P=0,\ \tau=0,\ \epsilon\frac{\partial N}{\partial T}+\epsilon^2U\frac{\partial N}{\partial X}=\epsilon W \quad\cdots\cdots(5)$$

$$Z=-H \text{ で } \epsilon U=0,\ \epsilon W=0 \quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。

ここで取り扱う長波の運動を

$$\epsilon\sim\sigma\sim\frac{1}{Re} \quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

とし、摂動法を用いると、長波の方程式は、最低次の近似で、

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial N}{\partial X}=\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2},\ \frac{\partial N}{\partial T}+\frac{\partial}{\partial X}\int_{-H}^{0}U\,dZ=0 \quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる。

従って、水平床上の長波の層流解は有次元表示で次の境界値問題に帰着する。$x\geqq 0$として、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{0}u\,dz=0 \quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$z=0 \text{ で } \tau=0\ ;\ x=0,\ z=0 \text{ で } u=u_0\cos\omega t \quad\cdots\cdots(10)$$

(9)式からηを消去し、$u(x,z,t)=A(x)B(z)e^{i\omega t}$と変数分離すると、(9)式は

$$\left[i\frac{\nu}{\omega}\frac{d^2}{dz^2}B(z)-B(z)\right]=\frac{g}{\omega^2A(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left[A(x)\int_{-h}^{0}B(z)dz\right]=-\gamma^2 \quad\cdots\cdots(11)$$

となる。γ^2は定数である。従って、境界条件(10)を満たす$B(z)$の解は、$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$とおくと、

$$B(z)=\gamma^2\left[1-\frac{\cosh\{(1-i)sz\}}{\cosh\{(1-i)sh\}}\right] \quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

$A(x)$の解は

$$A(x)=\left[\ e^{-k_1x}\,e^{ik_2x}\ \right] \quad\cdots\cdots\cdots(13)$$

となる。ここで、

$$\left.\begin{aligned}\frac{k_1}{k_0}&=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}-1\right)}\\ \frac{k_2}{k_0}&=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}+1\right)},\quad k_0=\frac{\omega}{\sqrt{gh}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$[\alpha-i\beta]=\frac{1}{\gamma^2h}\int_{-h}^{0}B(z)dz=\left[1-\frac{1+i}{2sh}\tanh\{(1-i)sh\}\right] \quad\cdots\cdots(15)$$

である。故に、境界値を満足する$u(x,z,t)$は

$$u=Real\left[u_0e^{-k_1x}\left[1-\frac{\cosh\{(1-i)sz\}}{\cosh\{(1-i)sh\}}\right]e^{i(k_2x-\omega t)}\right] \quad\cdots\cdots(16)$$

となる。水底における剪断力τ_Bは

$$\tau_B=Real\left[(1-i)\nu s u_0e^{-k_1x}\tanh\{(1-i)sh\}e^{i(k_2x-\omega t)}\right]\cdots(17)$$

波形ηは

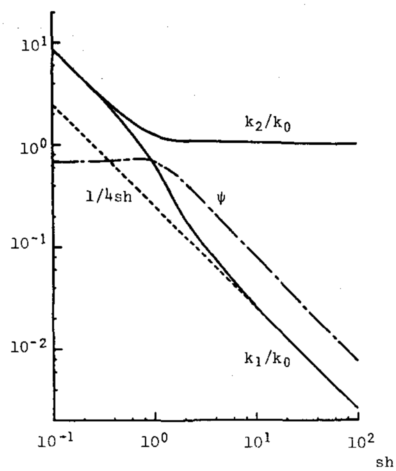
$$\eta=a\,e^{-k_1x}\cos(k_2x-\omega t+\varphi) \quad\cdots\cdots\cdots(18)$$

となる。ただし、

$$a=\sqrt{\frac{h}{g}}u_0,\ \varphi=\tan^{-1}\left[\frac{\alpha k_1+\beta k_2}{\alpha k_2+\beta k_1}\right] \quad\cdots\cdots\cdots(19)$$

である。

図−1に波の減衰率、波数の変化、流速と波形との位相差に関し、解の性質を示している。なお、破線は従来の層流境界層の解を示す。



図−1　長波の層流解の性質

2. 水平床上の長波の乱流解

ここでは、梶浦[1]が仮定したように、渦動粘性係数を底面摩擦速度 $\hat{u}_*$ を用いて、

$$K=\kappa\hat{u}_* z \quad \cdots\cdots\cdots(20)$$

とおく。従って、乱流解は層流解と同様に、$x\geqq 0$ で

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\hat{u}_* z\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{0}u\,dz=0 \quad \cdots\cdots\cdots(21)$$

$$\left.\begin{array}{l} z=-h+z_0 \text{ で } u=0,\ z=0 \text{ で } \tau=0 \\ x=0,\ z=0 \text{ で } u=U_0\cos\omega t \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(22)$$

という境界値問題に帰着する。境界条件(22)の形で明らかなように、ここでは粗面として扱っている。

式(21)から η を消去し、$u=A(x)B(z)e^{-i\omega t}$ とおくと、式(21)は

$$\left[i\frac{\kappa\hat{u}_*}{\omega}\frac{d}{dz}\left\{z\frac{d}{dz}B(z)\right\}-B(z)\right]=\frac{g}{\omega^2 A(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left[A(x)\int_{-h}^{0}B(z)dz\right]=-\gamma^2 \quad \cdots\cdots\cdots(23)$$

と変数分離可能である。境界条件(22)を満足する $B(z)$ および $A(x)$ の解はそれぞれ

$$B(z)=\gamma^2\left[1-\frac{N_1(y_h)J_0(y)-J_1(y_h)N_0(y)}{N_1(y_h)J_0(y_0)-J_1(y_h)N_0(y_0)}\right]\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$A(x)=\left[e^{-k_1 x}e^{ik_2 x}\right]\quad\cdots\cdots\cdots(25)$$

となる。ただし、$z'=z+h$ とおくと、

$$y=2e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{cz'},\quad y_h=2e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{ch},\quad y_0=2e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{cz_0},\quad c=\frac{\omega}{\kappa\hat{u}_*}\quad\cdots\cdots\cdots(26)$$

である。また、k_1, k_2 は式(14)で表され、α, β は

$$[\alpha-i\beta]=\frac{1}{\gamma^2 h}\int_{-h}^{0}B(z)dz=\left[1-\frac{z_0}{h}+\frac{\sqrt{cz_0}}{ch}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{N_1(y_h)J_1(y_0)-J_1(y_h)N_1(y_0)}{N_1(y_h)J_0(y_0)-J_1(y_h)N_0(y_0)}\right]\cdots\cdots\cdots(27)$$

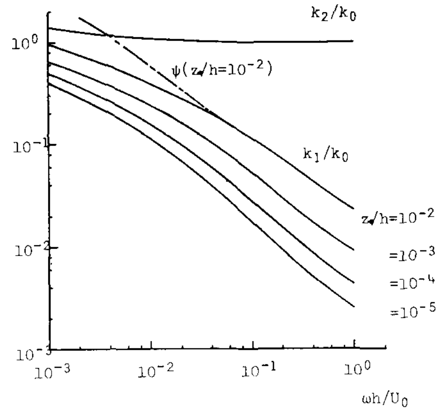
で定義される。故に、境界値に適合する u, τ_B は

$$u=\mathrm{Real}\left[u_0 e^{-k_1 x}\left[1-\frac{N_1(y_h)J_0(y)-J_1(y_h)N_0(y)}{N_1(y_h)J_0(y_0)-J_1(y_h)N_0(y_0)}\right]e^{i(k_2 x-\omega t)}\right]\cdots\cdots(28)$$

$$\tau_B=\mathrm{Real}\left[\rho\kappa\hat{u}_* u_0\sqrt{cz_0}\,e^{-k_1 x}\left[\frac{N_1(y_h)J_1(y_0)-J_1(y_h)N_1(y_0)}{N_1(y_h)J_0(y_0)-J_1(y_h)N_0(y_0)}\right]e^{i(k_2 x-\omega t-\frac{\pi}{4})}\right]\cdots\cdots(29)$$

となる。η は式(18)の形となる。

図−2に波の減衰率、波数の変化、流速と波形との位相差に関し、解の性質を示している。



図−2　長波の乱流解の性質

参考文献 Kajiura, K: Bull Earthq. Res. Inst., Vol.42, 1964.