

浅海における short waves の変形に関する数値解析法の比較

秋田大学 土木工学科 学生員 佐藤 隆夫
正 員 花岡 英夫

1. はじめに 浅海の short waves の計算法として Abbott 等の方法がある¹⁾。然らば方法では基本方程式は Peregrine の式を採用し、これを Implicit scheme で解くものである。しかしこの方法では計算時間がかかるため、一次元伝播の計算はともかく二次元伝播の計算では必ずしも得策とはいえない。また二次元への拡張も容易ではない。そのため本研究では浅海の任意水深を伝播する非線型性の波 (short waves) を考え、その数値解析法について従来の方法をふまえて言及する。

2. 計算方法 差分法には Leap-frog scheme を用いることとし、この比較として Abbott 等の方法で試みられている Preissmann's scheme を取り上げ、二次元の場合について両者の結果を比較検討することにした。図1は一次元計算における計算領域である。二次元の計算は一次元の計算結果をふまえて Leap-frog scheme のみで計算を行った。基本方程式は Peregrine の式である。

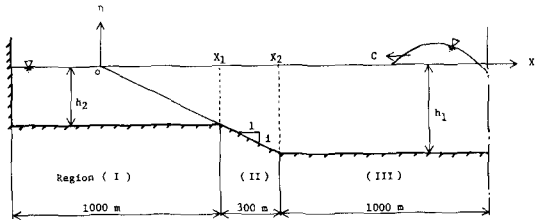


図-1 計算領域

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{運動方程式} \quad & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + g h \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} g h \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{P^2}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{P \delta}{h} \right) \right] - \frac{1}{6} g h \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{P}{h} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\delta}{h} \right) \right] \\ & \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\delta^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + g h \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2} g h \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{P \delta}{h} \right) \right] - \frac{1}{6} g h \left[\frac{\partial^3}{\partial y^3} \left(\frac{\delta}{h} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{P}{h} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

さらに Leap-frog scheme における基本方程式は線型近似を用いると次式で表現される。

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{運動方程式} \quad & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + g h \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{8} g h \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{2} g h \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{P \delta}{h} \right) \right] \\ & \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\delta}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + g h \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{8} g h \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{2} g h \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{P \delta}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{P \delta}{h} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

P, δ: 各 x, y 方向の線流量 D: 静水深 η: 振幅 h: 奥水深 (= D + η)

三次以上の項は同一形式である線型長波の式で置き換えてもさしつかえはないものとし、各々の差分で扱いやすい形に置換した。

Preissmann's scheme では、離散化して得られる二つの差分方程式

$$\left. \begin{aligned} H_j \circ \eta_{j+1} + B_j \circ P_{j+1} &= C_j \circ \eta_j + D_j \circ P_j + G_j \\ H_j \circ \eta_{j+1} + B_j \circ P_{j+1} &= C_j \circ \eta_j + D_j \circ P_j + G_j \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を Double sweep solution method で解いた²⁾。

3. 結果および考察 図1の各領域における数値解を図2、図3に示す。図2は線型長波理論、図3は(1)式によるものである。これらの図から、short waves の数値解析は最も簡単な scheme である Leap-frog scheme で可能であることが判る。これらの図中の一点鎖線は線型長波理論から得られる理論解で次式で与えられるものである³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \text{領域(I)} \quad & |H_1(x)| = A \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \\ \text{領域(II)} \quad & |H_2(x)| = A \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{1 + \frac{1}{4 g^2 c_1} \sin^2(\sqrt{c_1} x)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{領域(河)} \quad |H_b(x)| = A \sqrt{1 + \frac{1}{4n^2 x_1} \sinh 4n(\sqrt{x_2 - x_1})}$$

$$A: \text{入射波高} \quad n = 2\pi/\sqrt{g}$$

次に、二次元計算の結果を図4に示す。図4-aは折り返し回折図法による回折図であり、図4-b, cは各々線型長波理論および(1)式に基づいた回折図である。これ等の図によると、各々は空間波形分布については若干異なっているが、回折係数のオーダーはほぼ同じものが得られていることが判る。この様に、Leap-frogにより short waves の二次元計算も可能であることが判る。

4. 結び short waves の数値解析を二つの方法で行いその結果を比較・検討した。一つは従来から提案されている Preissmann の方法であり、もう一つは Leap-frog 法によるものである。その結果、より簡便な scheme である Leap-frog 法でも short waves の数値解析が可能であることが判った。

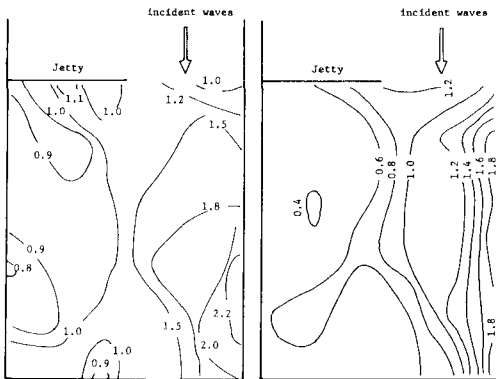
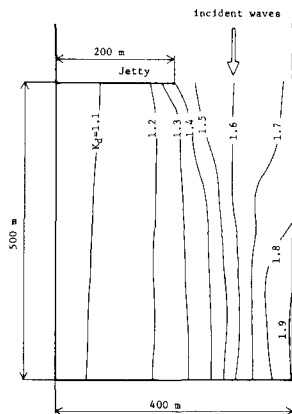


図-4 二次元計算



(A) 折返し回折図法

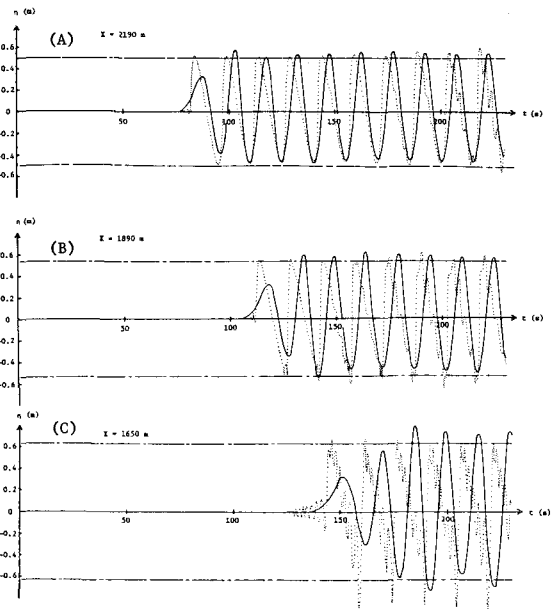


図-2 線型理論 ($h_1=10\text{ m}$, $i=0.02$, $\Delta x=20\text{ m}$, $\Delta t=1\text{ s}$)

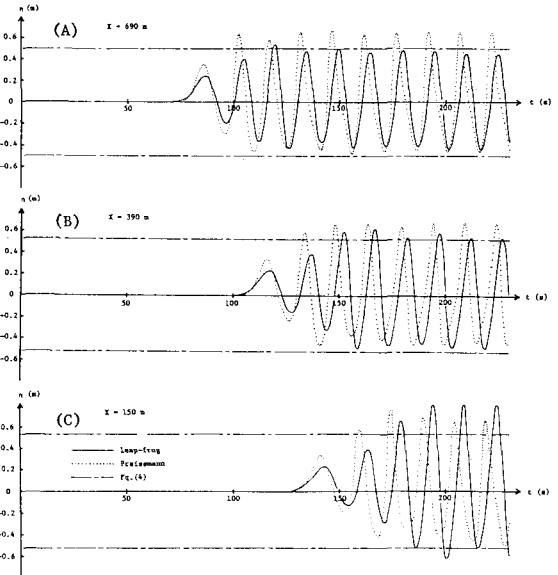


図-3 非線型理論 ($h_1=10\text{ m}$, $i=0.005$, $\Delta x=20\text{ m}$, $\Delta t=1\text{ s}$)

参考文献

- 1) Abbott, M.B.; H.M. Petersen and O. Skovgaard (1978): On the numerical modeling of short waves in shallow water, Jour. Hydraulic Res., 16, 3, 173-204.
- 2) LIGGETT, T.A. and T.A. CUNGE (1975); Numerical Methods of solution of the Unsteady Flow Equation, ch. 4 of Unsteady Flow in open Channels
- 3) 青藤 泰; 第31回年報摘要集 PP. 55~56, 1976.