

秋田大学 正員 〇薄 木 佐 三
秋田大学 正員 穠 農 知 徳
秋田大学 正員 長 谷 都 薫

1. 序論 はりの有限変位問題を扱う場合の基本的な仮定は断面形不変の仮定とせん断ひずみに関するオイラー・ベルヌーイの仮定である。しかしながら3次元問題として得られるであろう厳正解に比べれば、例えばはりの長さや短くなれば、特に断面内の応力分布において実状とあわなくなることが予想される。

本報告においては中実ばりの曲げ有限変位問題を対象として、断面形不変の仮定はこれを保持し、オイラー・ベルヌーイの仮定によって断面内のせん断応力を求める際に、せん断応力-せん断ひずみ関係から、せん断ひずみによる附加的なそりを考慮することによって、従来より精度な有限変位理論を展開するものである。

2. 既往の曲げ有限変位理論

座標系をFig.1に示す。問題の設定よりz軸方向変位

uは考えないから、ひずみ-変位関係式は

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{z} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (1.1)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (1.2)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.3)$$

断面形不変とオイラー・ベルヌーイの仮定は

$$e_{yy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (1.4)$$

これを満たす変位場として西野らは

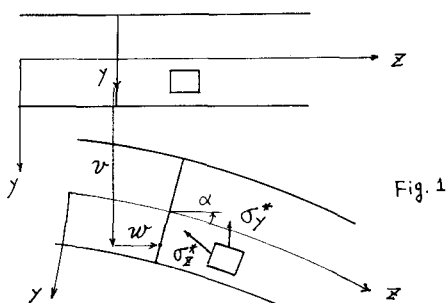
$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + y(\cos \alpha - 1) \\ w &= w_0 - y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

と与えた。ここで v_0, w_0 は部材軸線上の点のy, z方向変位である。' = d/dz として角αは断面内で定数あり

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= v_0' = v' \\ \cos \alpha &= 1 + w_0' = 1 + w' \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

ただし、ここではひずみが1に比べて十分小さい、微小ひずみ有限変位としている。つまり

$$\left. \begin{aligned} g &= (1 + w')^2 + (v')^2 \\ g_0 &= (1 + w_0')^2 + (v_0')^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$



とおくとき、これらは断面内の任意点および軸線上の点のz軸方向の線素の伸びを示すが、今の場合

$$g = g_0 = 1 \quad (1.8)$$

とある。直ひずみ e_{zz} は式(1.2), (1.5)より

$$e_{zz} = w_0' + \frac{1}{z} \left\{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \right\} - y \alpha' \quad (1.9)$$

ここでρをたわみ曲線の曲率半径とすると $(1 + y/\rho)^2 \approx 1 + 2y/\rho$ と近似し $(y/\rho)^2$ の項は無視した。

以上では式(1.4)の仮定が保持されているからせん断ひずみによるそりは無視されている。

3. 応力のつり合い

Fig. 1で微小要素 $dy \cdot dz$ を考え、はりの奥行きを $b(y)$ とする。要素のつり合い式は

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{\sigma}_y^* b) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\sigma}_z^* b) + F^* b = 0 \quad (2.1)$$

ここで $\bar{\sigma}_y^*, \bar{\sigma}_z^*$ はLagrangeの応力ベクトル、 F^* は物体力である。微小ひずみを仮定しているから変形後

の要素は単に剛体的に移動・回転したと見なせる。すると式(2.1)は物体力は無いものとして

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}b) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot b = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}b) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} \cdot b = 0 \quad (2.3)$$

となる。ここで σ_{yy} , σ_{zz} , $\tau_{xy} = \tau_{yz}$ は応力に等しい(向きと方向は変位後の y , z 軸方向)。

4. せん断ひずみによる変位

フックの法則 $\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}$ を式(2.3)へ代入して積分すれば

$$\tau_{yz}b = \int_y^{y_u} E b \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} dy \quad (3.1)$$

y_u は断面下端の y 座標である。この右辺に前節の式(1.9)を代入し、 $\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$ を用いると

$$\gamma_{yz} = \frac{E}{Gb} \left\{ A_y (w_1'' \cos \alpha_1 + v_1'' \sin \alpha_1) - G_y \alpha_1'' \right\} \quad (3.2)$$

ここで

$$A_y = \int_y^{y_u} dA, \quad G_y = \int_y^{y_u} y dA \quad (3.3)$$

である。 v_1 , w_1 , α_1 は式(1.5)の v_0 , w_0 , α をオ1近似値とすることを表す。せん断ひずみによる付加的な変位を考えた変位場を $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ とすると、

仮定 $\epsilon_{yy} = 0$ と式(3.2)より

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = f \quad (3.5)$$

ここで

$$f = \gamma_{yz} = -\frac{E}{Gb} G_y \alpha_1'' \quad (3.6)$$

である。これは式(3.2)で A_y を係数とする項は無視したものであり、微小変位と同じ仮定である。式(3.4), (3.5)の解は

$$\left. \begin{aligned} v^{(2)} &= v_z + \int_0^y \{ \cos(\gamma_z - \alpha_z) - 1 \} dy \\ w^{(2)} &= w_z + \int_0^y \sin(\gamma_z - \alpha_z) dy \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

となる。ここで v_z , w_z は $y=0$, つまり軸線上の点の変位であり、 γ_z , α_z は

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma_z &= f = \gamma_{yz} \\ \cos \alpha_z &= 1 + w_z' = 1 + (w^{(2)})' \\ \sin \alpha_z &= v_z' = (v^{(2)})' \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

である。このことは修正された断面回転角 α_z を断面内で一定と見なすことに等しい。微小ひずみであるから ($\gamma_z \ll 1$)

$$\left. \begin{aligned} \cos(\gamma_z - \alpha_z) &= \cos \alpha_z + \gamma_z \sin \alpha_z \\ \sin(\gamma_z - \alpha_z) &= \gamma_z \cos \alpha_z - \sin \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

と表わせる。その結果(3.1)は $\alpha_1'' = V'$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + y(\cos \alpha - 1) - \frac{E}{G} B_y V' \sin \alpha \\ w &= w_0 - y \sin \alpha - \frac{E}{G} B_y V' \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

となる。ここで v_z , $v^{(2)}$, α_z などとは改めて v_0 , v , α と書きなおした。又

$$B_y = \int_0^y \frac{G_y}{b} dy \quad (3.11)$$

式(3.10)を(1.2)に代入すると

$$\epsilon_{zz} = w_0' + \frac{1}{2} \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \} - y \alpha' - \frac{E}{G} B_y V' + \frac{1}{2} \frac{E^2}{G^2} B_y^2 (V'^2 \alpha'^2 + V'^2) \quad (3.12)$$

せん断ひずみは式(3.6)である。

5. つり合い式 仮想仕事の原理から、式(3.12)の3- γ -ライン上の高次項を無視するとつり合い式

$$\left. \begin{aligned} -(M' \cos \alpha)' - (N \sin \alpha)' &= 0 \\ -(N \cos \alpha)' + (M' \sin \alpha)' &= 0 \\ H' - T &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

および境界条件 $x=0$ と $x=L$

$$\left. \begin{aligned} \delta v_0 &= 0 \quad \text{又は} \quad M' \cos \alpha + N \sin \alpha - \bar{Q}_y = 0 \\ \delta w_0 &= 0 \quad \text{又は} \quad N \cos \alpha - M' \sin \alpha - \bar{N} = 0 \\ \delta \alpha &= 0 \quad \text{又は} \quad -M + (\bar{M}_{yy} - \bar{K}_{xy} V) \sin \alpha \\ &\quad + (\bar{M}_{xy} + \bar{K}_{yy} V) \cos \alpha = 0 \\ \delta V &= 0 \quad \text{又は} \quad -H + \bar{K}_{yy} \sin \alpha + \bar{K}_{xy} \cos \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} H &= \int_A \frac{E}{G} \sigma_{zz} B_y dA, \quad T = \int_A \frac{E}{G} \frac{G_y}{b} \tau_{yz} dA \\ \bar{M}_{yy} &= \int \bar{\tau}_{yz} y dA, \quad \bar{K}_{yy} = \int_A \frac{E}{G} \bar{\tau}_{yz} B_y dA \\ \bar{M}_{xy} &= \int \bar{\sigma}_{zz} y dA, \quad \bar{K}_{xy} = \int_A \frac{E}{G} \bar{\sigma}_{zz} B_y dA \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$\bar{\sigma}_{zz}$, $\bar{\tau}_{yz}$ は材端表面応力, M , N は曲げモーメントと軸力。