# 高次平板理論の近似方法について

秋田大学　学生員　○泉　晴夫
秋田大学　正　員　稼農知徳
秋田大学　正　員　薄木征三

1　まえがき　横せん断変形及び板厚方向直応力の影響を考慮した平板理論、いわゆる高次平板理論の近似方法には変位状態を板厚方向にわたって仮定する方法と応力状態を板厚方向にわたって仮定する方法とがある。変位仮定の方法においては応力状態の評価、応力仮定の方法においては変位状態の評価に多少の難点が生じる。本報告はこれまでの高次平板理論にはみられない近似方法を考えて、高次平板理論を展開したものである。古典平板理論を第一近似理論と考えると、ひずみ成分においては $\varepsilon_z=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ となっており、かつ応力成分においては $\sigma_z=0$ としている。本理論は第二近似理論として平衡条件式及び構成方程式を満足するように、ひずみ成分を修正し、これにもとづいた修正変位場を誘導する。この誘導過程において二種類の近似方法を示す。この修正変位場よりひずみ成分及び応力成分を求め、仮想仕事の原理を適用して平板の支配方程式を求めた。

## 2　平板の基本式

平板の微小変位理論におけるひずみ－変位関係式、体積力を無視した応力の平衡条件式及び一般化されたHookeの法則に基づく構成方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x=\bar{u}_{,x}\ ,\quad \varepsilon_y=\bar{v}_{,y}\ ,\quad \varepsilon_z=\bar{w}_{,z}\ , \\ \gamma_{xy}=\bar{v}_{,x}+\bar{u}_{,y}\ ,\quad \gamma_{yz}=\bar{w}_{,y}+\bar{v}_{,z}\ , \\ \gamma_{xz}=\bar{w}_{,x}+\bar{u}_{,z} \end{array}\right\} \qquad (1)\ \mathrm{a-f}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{x,x}+\tau_{xy,y}+\tau_{xz,z}=0 \\ \tau_{xy,x}+\sigma_{y,y}+\tau_{yz,z}=0 \\ \tau_{xz,x}+\tau_{yz,y}+\sigma_{z,z}=0 \end{array}\right\} \qquad (2)\ \mathrm{a-c}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x=(\lambda+2\mu)\varepsilon_x+\lambda(\varepsilon_y+\varepsilon_z) \\ \sigma_y=(\lambda+2\mu)\varepsilon_y+\lambda(\varepsilon_z+\varepsilon_x) \\ \sigma_z=(\lambda+2\mu)\varepsilon_z+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y) \end{array}\right\} \qquad (3)\ \mathrm{a-c}$$

ここで $\lambda$ と $\mu$ は　Lamé　の常数である。

## 3　修正変位場の決定

古典平板理論（第一近似理論）の変位場は式(4)で示される

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}=u_1-z\cdot w_{1,x} \\ \bar{v}=v_1-z\cdot w_{1,y} \\ \bar{w}=w_1 \end{array}\right\} \qquad (4)\ \mathrm{a-c}$$

ここで添字１は第一近似解を意味する。

式(4)に基づくひずみ成分及び応力成分を式(2)に代入して積分すると、修正せん断ひずみ成分が求められる。

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{xz}=\dfrac{1}{1-\nu}\left[\varphi^{\circ}_x-z\,\zeta^{\circ}_x+z^2\Phi^{\circ}_x\right] \\ \gamma_{yz}=\dfrac{1}{1-\nu}\left[\varphi^{\circ}_y-z\,\zeta^{\circ}_y+z^2\Phi^{\circ}_y\right] \end{array}\right\} \qquad (5)\ \mathrm{a,b}$$

ここで $\varphi^{\circ}_x$, $\varphi^{\circ}_y$ は積分定数で $(x,y)$ のみの関数である。また

$$\zeta^{\circ}_x(x,y)=2u_{1,xx}+(1+\nu)v_{1,xy}+(1-\nu)u_{1,yy}$$
$$\zeta^{\circ}_y(x,y)=2v_{1,yy}+(1+\nu)u_{1,xy}+(1-\nu)v_{1,xx}$$
$$\Phi^{\circ}_x(x,y)=(w_{1,xx}+w_{1,yy})_{,x}$$
$$\Phi^{\circ}_y(x,y)=(w_{1,xx}+w_{1,yy})_{,y}$$

本理論の一番目の近似法（近似法①）では直ひずみ $\varepsilon_z$ を修正する際に、$\sigma_z=0$　を考慮した構成方程式 $(3)_c$ を用いる。その結果の $\varepsilon_z$ は式(6)となる。

$$\varepsilon_z=\frac{\nu}{1-\nu}(\varphi^{\circ}_z-z\,\zeta^{\circ}_z) \qquad (6)$$

ここで

$$\varphi^{\circ}_z(x,y)=u_{1,x}+v_{1,y}$$
$$\zeta^{\circ}_z(x,y)=w_{1,xx}+w_{1,yy}$$

式(5)，(6)　を式(1)に代入して積分すると、式(7)のように第二近似解の修正変位場が決定される。

$$u=u^{\circ}+\frac{z}{1-\nu}\{\varphi^{\circ}_x-(1-\nu)w^{\circ}_{,x}\}-\frac{z^2}{2(1-\nu)}(\zeta^{\circ}_x-$$
$$-\nu\,\varphi^{\circ}_{z,x})+\frac{z^3}{6(1-\nu)}(2\Phi^{\circ}_x-\nu\,\zeta^{\circ}_{z,x})$$

$$v=v^{\circ}+\frac{z}{1-\nu}\{\varphi^{\circ}_y-(1-\nu)w^{\circ}_{,y}\}-\frac{z^2}{2(1-\nu)}(\zeta^{\circ}_y-$$
$$-\nu\,\varphi^{\circ}_{z,y})+\frac{z^3}{6(1-\nu)}(2\Phi^{\circ}_y-\nu\,\zeta^{\circ}_{z,y})$$

$$w=w^{0}-\frac{\nu}{1-\nu}z\varphi_z^{0}+\frac{\nu}{2(1-\nu)}z^2\zeta_z^{0} \qquad (7)\ \mathrm{a-c}$$

ここで$u^0$，$v^0$及び$w^0$は積分定数で（$x,y$）のみの関数である。

本論文の二番目の近似方法（近似法②）では直ひずみ$\varepsilon_z$を修正する際に、式(2)$_c$の応力の平衡条件式より$\sigma_z$を求め、式(3)$_c$の構成方程式を用いる。

その結果は、式(8)となる。

$$\varepsilon_z=\frac{1}{2(1-\nu^2)}\Big[\{1-2\nu(1+\nu)\}\varphi_z^{0}+z\{2\nu(1+\nu)\zeta_z^{0}-(\varphi_{x,x}^{0}+\varphi_{y,y}^{0})\}+\frac{z^2}{2}(\zeta_{x,x}^{0}+\zeta_{y,y}^{0})-\frac{z^3}{3}(\phi_{x,x}^{0}+\phi_{y,y}^{0})\Big] \qquad (8)$$

式(5)，(8)を式(1)に代入し積分すると、式(9)のように第二近似解の修正変位場が決定される。

$$u=u^{0}+\frac{z}{1-\nu}\{\varphi_x^{0}-(1-\nu)w^{0}_{,x}\}-\frac{z^2}{2(1-\nu)}\Big[\zeta_x^{0}-\{\nu-\frac{1}{2(1+\nu)}\}\varphi_{z,x}^{0}\Big]+\frac{z^3}{6(1-\nu)}\Big[2\phi_x^{0}-\nu\zeta_{z,x}^{0}+\frac{1}{2(1+\nu)}(\varphi_{x,xx}^{0}+\varphi_{y,xy}^{0})\Big]-\frac{z^4}{48(1-\nu^2)}(\zeta_{x,xx}^{0}+\zeta_{y,xy}^{0})+\frac{z^5}{120(1-\nu^2)}(\phi_{x,xx}^{0}+\phi_{y,xy}^{0})$$

$$v=v^{0}+\frac{z}{1-\nu}\{\varphi_y^{0}-(1-\nu)w^{0}_{,y}\}-\frac{z^2}{2(1-\nu)}\Big[\zeta_y^{0}-\{\nu-\frac{1}{2(1+\nu)}\}\varphi_{z,y}^{0}\Big]+\frac{z^3}{6(1-\nu)}\Big[2\phi_y^{0}-\nu\zeta_{z,y}^{0}+\frac{1}{2(1+\nu)}(\varphi_{x,xy}^{0}+\varphi_{y,yy}^{0})\Big]-\frac{z^4}{48(1-\nu^2)}(\zeta_{x,xy}^{0}+\zeta_{y,xy}^{0})+\frac{z^5}{120(1-\nu^2)}(\phi_{x,xy}^{0}+\phi_{y,yy}^{0})$$

$$w=w^{0}-\frac{z}{1-\nu}\{\nu-\frac{1}{2(1+\nu)}\}\varphi_z^{0}+\frac{z^2}{2(1-\nu)}\{\nu\zeta_z^{0}--\frac{1}{2(1+\nu)}(\varphi_{x,x}^{0}+\varphi_{y,y}^{0})\}+\frac{z^3}{12(1-\nu^2)}(\zeta_{x,x}^{0}+\zeta_{y,y}^{0})--\frac{z^4}{24(1-\nu^2)}(\phi_{x,x}^{0}+\phi_{y,y}^{0}) \qquad (9)\ \mathrm{a-c}$$

近似法①，②の修正変位場において板厚方向の座標$z$のベキ乗に注目すると、それぞれ次のように修正変位場の表現を変換することができる。

近似法①；

$$\left.\begin{aligned}u&=u+z\cdot\varphi_x+z^2\zeta_x+z^3\phi_x\\ v&=v+z\cdot\varphi_y+z^2\zeta_y+z^3\phi_y\\ w&=w+z\cdot\varphi_z+z^2\zeta_z\end{aligned}\right\} \qquad (10)\ \mathrm{a-c}$$

近似法②；

$$\left.\begin{aligned}u&=u+z\cdot\varphi_x+z^2\zeta_x+z^3\phi_x+z^4\eta_x+z^5\xi_x\\ v&=v+z\varphi_y+z^2\zeta_y+z^3\phi_y+z^4\eta_y+z^5\xi_y\\ w&=w+z\varphi_z+z^2\zeta_z+z^3\phi_z+z^4\eta_z\end{aligned}\right\} \qquad (11)\ \mathrm{a-c}$$

ここで式(7)と(10)及び(9)と(11)の変位場をもとに夫々展開して得られる結果は夫々全く一致することが確められている。また、式(10)の修正変位場は、Lo. etal [1]の変位仮定に基づく高次平板理論と全く一致するものである。

4　釣合い方程式と境界条件

近似法②に基づいた修正変位場(11)を用いて、仮想仕事の原理により得られる釣合い方程式と境界条件は次の通りである。

$N_{x,x}+N_{y,y}+q_x=0$，$N_{y,y}+N_{xy,y}+q_y=0$

$Q_{x,x}+Q_{y,y}+q_z=0$，$M_{x,x}+M_{xy,y}-Q_x+m_x=0$

$M_{y,y}+M_{xy,x}-Q_y+m_y=0$，$P_{x,x}+P_{y,y}-N_z+n_z=0$

$T_{x,x}+T_{xy,y}-2P_x+t_x=0$，$T_{y,y}+T_{xy,x}-2P_y+t_y=0$

$S_{x,x}+S_{y,y}-2M_z+m_z=0$，$H_{x,x}+H_{xy,y}-3S_x+h_x=0$

$H_{y,y}+H_{xy,x}-3S_y+h_y=0$，$L_{x,x}+L_{y,y}-3T_z+t_z=0$

$R_{x,x}+R_{xy,y}-4L_x+r_x=0$，$R_{y,y}+R_{xy,x}-4L_y+r_y=0$

$F_{x,x}+F_{y,y}-4H_z+h_z=0$，$K_{x,x}+K_{xy,y}-5F_x+k_x=0$

$K_{y,y}+K_{xy,x}-5F_y+k_y=0$ 　　(12) a－g

板の周辺において式(12)に対応する境界条件は次の各々の積を規定することによって示される。

$N_n u_n$，$N_{ns} u_s$ ／ $Q_n w$，$M_n \varphi_n$，$M_{ns}\varphi_s$ ／ $P_n\varphi_z$，$T_n\zeta_n$，$T_{ns}\zeta_s$ ／ $S_n\zeta_z$，$H_n\phi_n$，$H_{ns}\phi_s$ ／ $L_n\phi_z$，$R_n\eta_n$，$R_{ns}\eta_s$ ／ $F_n\eta_z$，$K_n\xi_n$，$K_{ns}\xi_s$

ここで$n$，$s$は板の端部に対する法線及び接線方向座標である。

5　結果

式(10)に基づく計算例においては平板の面内応力度$\sigma_x$，$\sigma_y$，$\tau_{xy}$に関しては良い結果が得られるが平板の面外応力度$\sigma_z$，$\tau_{xz}$，$\tau_{yz}$の評価に難点がありこの場合さらに応力の釣合い式により修正されなければならない。しかし式(11)に基づく結果は変位及び応力度のいずれにおいても厳密解に近い値が得られた。もちろんこの高次平板理論は異方性板及び積層板に適用することによってより効果的な結果が得られることは言うまでもない。

[1] K.H.Lo, etal, Jour. Appl. Mech. Vol. 44, 1977 and Int. J. Solids and Structures, Vol. 14, 1978