動的弾塑性解析において生ずる誤差について

東北大学工学部　学生員　○中島章典
東北大学工学部　正会員　　倉西　茂

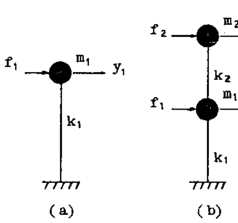
1．はじめに

動的応答解析には種々の方法があるが，Newmarkのβ法などの逐次積分法を用いることが多い。この方法は他に比べて簡単に多自由度系の応答を求めることができるという利点を持っているので，広く線形動的応答解析に用いられているほか，非線形応答解析[Ref.]にも適用されている。たとえば，Newmarkのβ法（β=1/4）を線形動的応答解析に用いる場合，時間領域を有限の時間刻みに分割して近似的に応答を求めるために，位相遅れなどの解析的誤差を生じる。この方法を非線形系に適用する際には，さらに種々の誤差が生じるものと思われる。

そこで本研究では，修正荷重増分法にNewmarkのβ法（β=1/4）を適用した手法を用いて，非線形復元力を有する1自由度，2自由度系の動的応答を計算し厳密解と比較することによってこの計算法の精度を調べた。

2．解析モデルと運動方程式

1自由度，2自由度解析モデルは，図－1（a），（b）に示すようなせん断型質点バネ系モデルを考える。バネの復元力特性は図－2に示すような完全弾塑性型とし，除荷が生じた場合には弾性除荷径路モデルに従うものとする。図－1に示す振動モデルの運動方程式は，減衰を無視すれば，



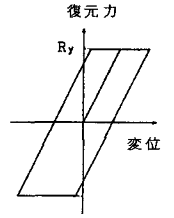
図－1　振動モデル

1自由度モデルについて　$m_1\ddot{y}_1 + R_1 = f_1(t)$ ――――（1）

2自由度モデルについて
$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + R_1 - R_2 &= f_1(t) \\ m_2\ddot{y}_2 + R_2 &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{――――(2)}$$

となる。ここに復元力R_1，R_2は

$$R_1 = \begin{cases} \pm R_{1y} - K_1(y_{1m} - y_1) & ：弾性 \\ \pm R_{1y} & ：塑性 \end{cases} \qquad R_2 = \left.\begin{cases} \pm R_{2y} - K_2(y_{rm} - y_r) & ：弾性 \\ \pm R_{2y} & ：塑性 \end{cases}\right\} \text{――(3)}$$



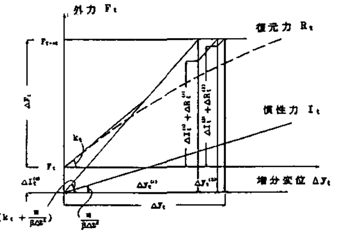
図－2　復元力特性

と表わせる。ここでR_{iy}は降伏復元力，y_{im}は復元力を求める基準となる塑性変位，y_rは相対変位（$y_2 - y_1$）である。式（1），（2）の運動方程式は式（3）の復元力の組合せからなり，厳密解はこの微分方程式の解を弾塑性復元力の各折れ線ごとに連続条件でつなぐことによって得られる。

3．修正荷重増分法による動的応答解析

修正荷重増分法にNewmarkのβ法（β=1/4）を適用した計算手法について簡単に説明する。図－3のように，時刻tの運動方程式の釣合いが求まっている。復元力，慣性力が増分変位に対して図のようになっている。時刻tから$t+\Delta t$における増分形の運動方程式は図中式（4）となる。ここで増分復元力，増分慣性力が増分変位の関数として，式（5）で与えられる。ここにk_tは時刻tにおける接線剛性係数である。$\Delta I_t^{(0)}$は式（5b）で増分変位ゼロに対する見かけ上の外力である。k_tと慣性力の増分変位に対する傾きの和の勾配を外力に対して立てれば，1次増分変位が求まる。1次増分変位に対して増分復元力，増分慣性力の和を取れば，接線剛性係数を仮定したことにより，外力との不釣合いを生じる。そこで反復計算を行ない不釣合い力を修正すれば，時刻$t+\Delta t$の運動方程式の釣合いが求まる。

$$\Delta I_t + \Delta R_t = \Delta F_t \quad \text{――――(4)}$$
$$\Delta R_t = k_t \Delta y_t \quad \text{――――(5a)}$$
$$\Delta I_t = m\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta y_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{y}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{y}_t\right) \quad \text{――――(5b)}$$
$$\left(k_t + \frac{m}{\beta\Delta t^2}\right)\Delta y_t = \Delta F_t - \Delta I_t^{(0)} \quad \text{――――(6)}$$

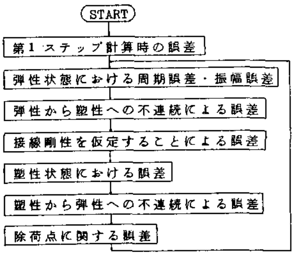


図－3　収斂計算過程

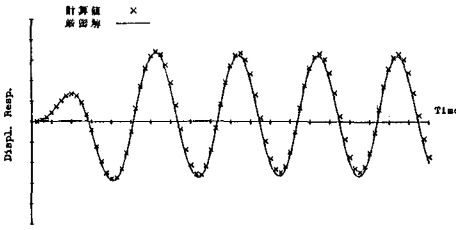
4．数値計算

i） 1自由度系について

完全弾塑性型の復元力を有する1自由度系が正弦波の共振外力を受けるときの変位応答を図－5に示す。刻み時間Δtは外力周期T_fの1/16である。計算値は振幅のわずかなずれはあるが，厳密解によく一致している。図－4には計算値に含まれる誤差の要因を示している。図に示すような誤差が複雑に関連して図－5のような誤差が生じている。しかし誤差は累積せず，時間の経過につれて厳密解に対して振動の中止軸が移動しているような結果となっている。



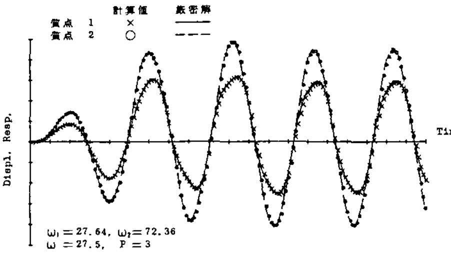
図－4　誤差の要因



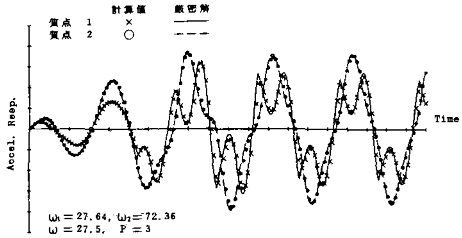
図－5　1自由度変位応答曲線（$\Delta t = T_f/16$）

ii） 2自由度系について

図－1(b)のモデルで下層のバネだけが塑性化する場合の変位応答を図－6に示す。計算は$\Delta t = T_f/32$で，外力周期は系の1次固有周期よりわずかに長い場合としている。質点1の応答波形が弾性の場合と異なっている。振幅のわずかなずれがあるが計算値と厳密解はかなりよく一致している。このときの加速度応答を図－7に示す。バネが塑性化すると質点1の応答は不連続的に変化しており，応答波形は弾性の場合と大きく変化している。これはバネが塑性化したときの系の固有周期の変化が加速度波形の上に現われているのである。しかしこの場合も加速度応答の計算値は厳密解とよく一致している。

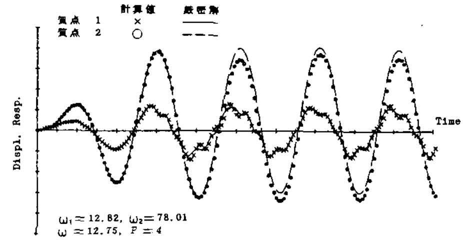


図－6　2自由度変位応答曲線（$\Delta t = T_f/32$, k_1が塑性）

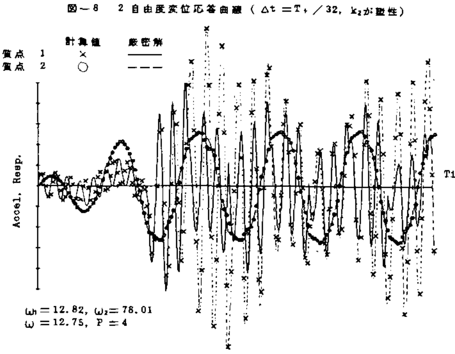


図－7　2自由度加速度応答曲線（$\Delta t = T_f/32$, k_1が塑性）

次に上層のバネだけが塑性化する場合の変位応答を図－8に示す。バネが塑性化すると質点1の波形の上に高次の波形が現われている。このときの加速度応答を図－9に示す。弾性の場合も質点1では2次波形が現われているが，バネが塑性化すると特に2次波形が大きくなっていることがわかる。これはバネが塑性化したときの系の固有周期が2次周期に近い値であるので，バネの塑性化，あるいは塑性域からの除荷の際の波形の乱れが2次波形を増幅することによると思われる。質点1の計算値は図からわかるように厳密解とかなり違っている。これは，加速度の不連続的な急変による誤差を大きく含むことによる。しかし弾塑性応答において注目すべき応答変位はこの場合でも比較的よく一致しており，計算法の精度は十分であると思われる。また刻み時間を小さくすれば，計算値は厳密解に漸近する。その結果については当日発表する予定である。



図－8　2自由度変位応答曲線（$\Delta t = T_f/32$, k_2が塑性）



図－9　2自由度加速度応答曲線（$\Delta t = T_f/32$, k_2が塑性）

《参考文献》 E.L.Wilson他 "Nonlinear Dynamic Analysis ....." Earth. Eng... Vol 1, 1973