波動論に立脚した振動論

八戸工業大学 正員 穐山 和男

1. はじめに

連続体の振動において、まず出発となる完全弾性体の微小振動の理論に関し、これまで明確な立脚点は示されていない。示されているのは、等断面でかつ部材が1つだけの場合の直交関係及び正規関数についてのみである。

本論文は、波動論を出発点にすえ、完全弾性体の微小振動現象を根本から考え直したものである。ただし、初等理論の範囲内である。

2. 波動・振動・位相速度曲線

物理学の本によれば[1]、波動とは振動が伝播することである。伝播方向に境界がなく、かつエネルギーの散逸がなければ、振動は無限に伝播していく。しかし、有限な部材においては、境界により反射された反射波と進行波とから定常波が生じる。いわゆる振動現象が生じるわけである。また、進行波と定常波の分散関係は同一であるので、弾性進行波と微小振動論との橋渡しをするのは、位相速度曲線である。

3. 部材ごとに等断面な複数部材から構成された構造系の直交関係及び正規関数に関する検討

今、面内振動でかつ曲げ振動と縦振動とが同時に生じている場合について考えてみる。
図1に示すように、任意の節点aにn個の部材が集まっている場合を考える。
水平から反時計回りに測った角度をθ_i ($i=1,2,\cdots,n$) とすれば、平衡条件から

$$\left.\begin{aligned}
&\sum(-S_i\cos\theta_i+N_i\sin\theta_i)_0=0\\
&\sum(S_i\sin\theta_i+N_i\cos\theta_i)_0=0\\
&\sum(M_i)_0=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

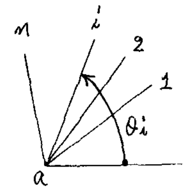

図1. θの正方向

ここで、Sはせん断力，Mは曲げモーメント，Nは軸力である。その正負は、節点aを軸方向座標z_iの原点にとり、図2に示すようにとる。式(1)の添字0は、$z_i=0$における値を示す。Σは1からnまでの和をとることを意味する。

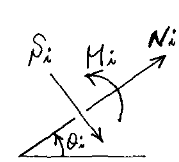

図2 断面力(正)

曲げ振動及び縦振動の微分方程式を満足する横方向変位及び縦方向変位をそれぞれ、Y_i, X_i ($i=1,2,\cdots,n$) とすれば

$$M_i=EI_iY_i'',\quad S_i=EI_iY_i''',\quad N_i=EA_iX_i'\qquad(2)$$

ここで、Y_iの正方向は、図3に示すように、z_iの正方向から反時計回り方向へなる向きであり、X_iの正方向は、z_i方向と同一である。I，Aは断面2次モーメント，断面積である。Eはヤング率，ダッシュはz_iに関する微分を意味する。
式(2)を式(1)に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}
&\sum(-EI_iY_i'''\cos\theta_i+EA_iX_i'\sin\theta_i)_0=0\\
&\sum(EI_iY_i'''\sin\theta_i+EA_iX_i'\cos\theta_i)_0=0\\
&\sum(EI_iY_i'')_0=0
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

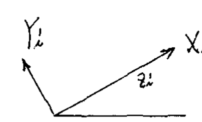

図3 変位(正)

次に、節点 a の鉛直上向変位を Y_a, 水平右向変位を X_a とすれば

$$(Y_i\cos\theta_i + X_i\sin\theta_i)_0 = Y_a, \quad (-Y_i\sin\theta_i + X_i\cos\theta_i)_0 = X_a \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

$$\therefore \quad (Y_i)_0 = Y_a\cos\theta_i - X_a\sin\theta_i, \quad (X_i)_0 = Y_a\sin\theta_i + X_a\cos\theta_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

また、節点 a における節点の回転角は、部材の剛体的回転が無いと仮定すれば、部材の回転角 Y_a' は、部材の接線角 $(Y_i')_0$ に等しくなる。Y_a' は反時計回りを正とする。

$$(Y_i')_0 = Y_a' \tag{6}$$

今、節点 a を原点とした次の積分を考える。ただし、r ≠ s の場合についてである。

$$b_{rs} = \sum\int_0^{l_i}(\rho A_i Y_{ir}Y_{is} + \rho A_i X_{ir}X_{is})dz_i, \quad k_{rs} = \sum\int_0^{l_i}(EI_i Y_{ir}''Y_{is}'' + EA_i X_{ir}'X_{is}')dz_i \tag{7}$$

ここで、l_i は部材 i の部材長, r 及び s はモード番号である。

$z_i=0$ における b_{rs} の値を $(b_{rs})_a$ とすれば

$$(b_{rs})_a = -\sum EI_i(Y_{is}Y_{ir}''' - Y_{ir}Y_{is}''' - Y_{is}'Y_{ir}'' + Y_{ir}'Y_{is}'')_0 - \sum EA_i(X_{ir}X_{is}' - X_{is}X_{ir}')_0 \tag{8}$$

式(8)に式(5), (6)を代入すれば

$$(b_{rs})_a = Y_{as}\sum(-EI_iY_{ir}'''\cos\theta_i + EA_iX_{ir}'\sin\theta_i)_0 - Y_{ar}\sum(-EI_iY_{is}'''\cos\theta_i + EA_iX_{is}'\sin\theta_i)_0 + Y_{as}'\sum(EI_iY_{ir}'')_0 - Y_{ar}'\sum(EI_iY_{is}'')_0$$
$$+ X_{as}\sum(EI_iY_{ir}'''\sin\theta_i + EA_iX_{ir}'\cos\theta_i)_0 - X_{as}\sum(EI_iY_{is}'''\sin\theta_i + EA_iX_{is}'\cos\theta_i)_0 \tag{9}$$

式(9)は式(3)により $\qquad (b_{rs})_a = 0$ (10)

同様に、k_{rs} の $z_i=0$ における値を $(k_{rs})_a$ とすれば

$$\rho A_i p_r^3 Y_{ir} = p_r(EI_iY_{ir}''''), \quad \rho A_i p_s^3 Y_{is} = p_s(EI_iY_{is}''''), \quad \rho A_i p_r^3 X_{ir} = p_r(-EA_iX_{ir}''), \quad \rho A_i p_s^3 X_{is} = p_s(-EA_iX_{is}'') \tag{11}$$

から

$$(p_r^3 - p_s^3)\sum\int_0^{l_i}(\rho A_i Y_{ir}Y_{is} + \rho A_i X_{ir}X_{is})dz_i = (p_r - p_s)\int_0^{l_i}(EI_iY_{ir}''Y_{is}'' + EA_iX_{ir}'X_{is}')dz_i$$
$$+ p_r\sum\Big|EI_i(Y_{is}Y_{ir}''' - Y_{is}'Y_{ir}'') - EA_iX_{ir}'X_{is}\Big|_0^{l_i} - p_s\sum\Big|EI_i(Y_{ir}Y_{is}''' - Y_{ir}'Y_{is}'') - EA_iX_{is}'X_{ir}\Big|_0^{l_i} \tag{12}$$

$$\therefore \quad (p_r - p_s)(k_{rs})_a = p_s\sum(EI_iY_iY_{is}''' - EI_iY_{ir}'Y_{is}'' - EA_iX_{ir}X_{is}')_0 - p_r\sum(EI_iY_{is}Y_{ir}''' - EI_iY_{is}'Y_{ir}'' - EA_iX_{is}X_{ir}')_0 \tag{13}$$

$(b_{rs})_a$ と同様に、式(3), (5), (6)のもとで、式(13)の右辺はゼロとなる。

$$\therefore \quad (k_{rs})_a = 0 \tag{14}$$

故に、式(3), (5), (6)が成立していれば、部材全体に渡る積分は、節点ごとにゼロとなり、残る境界においてもゼロであるから、連続体に関して構成したラグランジュの方程式において、対角項以外すべてゼロとなる。即ち直交関係が成立する。Y_i, X_i は正規関数となる。

4. 位相速度曲線・正規関数

図4, 5に曲げ波と縦波の位相速度曲線を示す。ここで、γ：曲げ波の伝播定数, R：横断面の回転半径, C_0：縦波の速度, p：角振動数

$$曲げ波：\ \frac{p}{C_0\gamma} = R\gamma, \quad 縦波：\ \frac{p}{C_0\gamma_0} = 1.0 \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= C_{i1}\sin\gamma_i z_i + C_{i2}\cos\gamma_i z_i + C_{i3}\,sh\gamma_i z_i + C_{i4}\,ch\gamma_i z_i \\ X_i &= E_{i1}\sin\gamma_0 z_i + E_{i2}\cos\gamma_0 z_i \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ここで、$C_{i1}\sim C_{i4}$, E_{i1}, E_{i2} は定数, $\gamma_0 = R_i\gamma_i^2$, i：部材番号

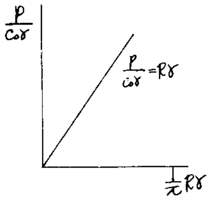

図4 曲げ波の位相速度曲線

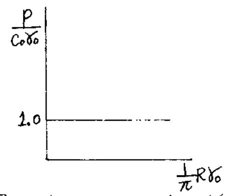

図5 縦波の位相速度曲線

5. おわりに

区分的に等断面ならば、部材の剛体的回転を無視すれば先に述べたように直交関係が成立する。しかし連続的に変化する場合には直交関係は成立しない。[2)]

参考文献 1)藤原邦男：振動と波動，サイエンス社 2)篭山和男：第31回応力連合講演論文抄録集，p329−330