

# トラスの最適設計に関する基礎的考察

ハル工業大学 正会員 長谷川 明

はじめに

本論文は簡単な2等辺三角形のトラスの最小重量設計による最適化を種々の荷重に対し行ない、載荷荷重と最適トラスの形に関し、1次元単関数勾配法により計算し考察したものである。

## 1. 計算に用いたトラスとその材料

トラスは図1の2等辺三角形をなす静定トラスである。使用する鋼種はSS41とし各部材とも正方形断面をもつ角棒とする。

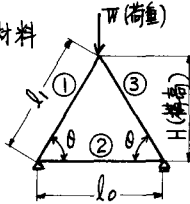


図1. 計算モデル

## 2. 制約条件

各部材断面積は表1に示す許容応力度 $\sigma$ および表2に示す最大細長比の制約を受けるものとする。

表1. 許容応力度 $\sigma$  (単位:  $\text{kg}/\text{cm}^2$ )  $\lambda$ : 細長比

|          |                     |                                       |
|----------|---------------------|---------------------------------------|
| 軸方向引張応力度 |                     | 1400 (1)                              |
|          | $\lambda \leq 20$   | 1400 (2)                              |
| 軸方向圧縮応力度 | $20 < \lambda < 93$ | $1400 - 8.4(\lambda - 20)$ (3)        |
|          | $\lambda \geq 93$   | $12,000,000 / (6700 + \lambda^2)$ (4) |

表2. 最大細長比

|           |         |
|-----------|---------|
| 引張力を受ける部材 | 200 (5) |
| 圧縮力を受ける部材 | 120 (6) |

## 3. 数値の無次元化

体積 $V = \sum A_i l_i$ を基準長さ $l_0$ の3乗で無次元化すると次のようになる。

$$V/l_0^3 = \sum (A_i/l_0^2) (l_i/l_0)$$

ここで $A_i$ ,  $l_i$ はそれぞれ①部材の断面積および部材長である。また $A_i$ は正方形断面の場合(1)~(6)から一意に決まり、それらから $A_i/l_0^2$ は次のように表わされる。

(1), (2)から

$$A_i/l_0^2 = \frac{P_i}{1400 l_0^2} \quad (7)$$

(3)から

$$A_i/l_0^2 = \left( \frac{8.4\lambda}{1568} + \frac{211.68}{1568} \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^2 + \frac{1568}{1568} \frac{P_i}{l_0^2} \right)^2 \quad (8)$$

(4)から

$$A_i/l_0^2 = \frac{3350}{12,000,000} \frac{P_i}{l_0^2} + \frac{3350}{12,000,000} \left( \frac{P_i}{l_0^2} \right)^2 + \frac{444,000,000}{12,000,000} \frac{P_i}{l_0^2} \quad (9)$$

(5)から

$$A_i/l_0^2 = \frac{12}{\lambda_{\max}} \left( \frac{l_i}{l_0} \right)^2 \quad (10)$$

ここで $P_i$ は①部材の部材力である。(7)~(10)はいずれも $\frac{l_i}{l_0}$ と $\frac{P_i}{l_0^2}$ の関数となっている。さらに荷重 $W$ と構高 $H$ を使うと

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{l_2}{l_0} = \sqrt{\left( \frac{H}{l_0} \right)^2 + \frac{1}{4}}, \quad \frac{l_3}{l_0} = 1$$

$$\frac{P_1}{l_0^2} = \frac{P_2}{l_0^2} = -\frac{W}{2l_0^2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left( \frac{l_0}{H} \right)^2}, \quad \frac{P_3}{l_0^2} = \frac{W}{4l_0^2} \frac{l_0}{H}$$

と表わされ、体積 $V/l_0^3$ は $\frac{W}{l_0^2}$ と $\frac{H}{l_0}$ の関数である。

## 4. 計算方法

各々の $\frac{W}{l_0^2}$ に対し、体積 $V \rightarrow \min$ とする $\frac{H}{l_0}$ を図2に示すフローチャートより求める。

構高 $\frac{H}{l_0}$ の改訂は1次元単関数勾配法によって、次式で行なう。

$$\left( \frac{H}{l_0} \right)^{k+1} = \left( \frac{H}{l_0} \right)^k - \alpha^k \text{sign} \left\{ V' \left( \frac{H}{l_0} \right)^k \right\}$$

ここで

$$\left( \frac{H}{l_0} \right)^k: \text{試行回数} k \text{ 回目の} \frac{H}{l_0}$$

$\alpha^k$ : 適当な移動量

$\text{sign}$ : 符号(1あるいは-1)

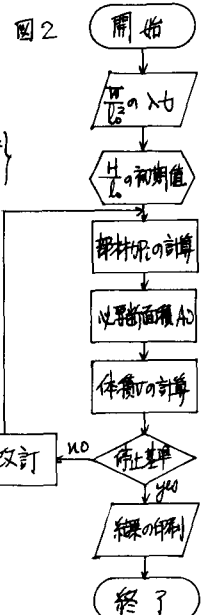
$V'$ : 体積変化の勾配

探索の停止は次式による。

$$\left| \left( \frac{H}{l_0} \right)^{k+1} - \left( \frac{H}{l_0} \right)^k \right| < \varepsilon = 10^{-5}$$

## 5. 計算結果および考察

図3に得られた荷重 $\frac{W}{l_0^2}$ と最小体積 $\frac{V}{l_0^3}$ の関係を示す。また荷重 $\frac{W}{l_0^2}$ と最適構高 $\frac{H}{l_0}$ および各部材の細長比 $\lambda$ の関係も図4に示す。図3から荷重の増加に伴い、最小体積がほぼ直線に近い曲線で増加することわかる。また図4から、荷重の増加とともに最適構高は高くなり、各部材の細長比は小さくなる傾向が見られる。図4の最適構高を示す曲線は、折線の如く求められ、この勾配の変化する点をA, B, ..., Eとし、各区間について



検討した結果、次の事が明らかになった。

1) O A 区間 ( $0 < \frac{W}{l_0^2} < 1.6$ )  $\lambda_1 = \lambda_3 = 120$ ,  $\lambda_2 = 200$

この区間では全ての部材が最大細長比によって決定されている。これは荷重が軽く許容応力度から求められる部材寸法が最大細長比を超えるからである。したがって部材長をできるだけ短くするよう、最適構高は低くとられている。なお  $\frac{W}{l_0^2} \rightarrow 0$  の時、 $\frac{H_{opt}}{l_0} \rightarrow 0$  となり (10) 式より  $\frac{V_{opt}}{l_0^3} = 0.508 \times 10^{-3}$  となる。

2) A B 区間 ( $1.6 < \frac{W}{l_0^2} < 4.0$ )  $93 < \lambda_1 < 120$ ,  $\lambda_2 = 200$

荷重の増加に伴い ①、③部材の細長比は 120 未満となり許容応力度 (4) によって最小体積が求まっている。また、最適構高はあまり変化せず、①部材と②部材のなす角  $\theta$  は約  $30^\circ$  である。

3) B C 区間 ( $4.0 < \frac{W}{l_0^2} < 7.4$ )  $20 < \lambda_1 < 93$ ,  $\lambda_2 = 200$

①、③部材の細長比は 93 未満となり、最小体積は許容応力度 (2) によって求められている。一方②部材は、まだ軸力が小さいので、最大細長比によって設計されている。この区間は、C 点 ( $\frac{W}{l_0^2} = 5.5$ ) で傾向が異なり、B C 区間では、①③部材の細長比が減少するのに対して、C D 区間では細長比が逆に増大している。また、C D 区間では、荷重の増加に対し、最適構高の増大が著しい。

4) D E 区間 ( $7.4 < \frac{W}{l_0^2}$ )  $20 < \lambda_1 < 93$ ,  $\lambda_2 < 200$

さらに荷重が増加すると、D 点 ( $\frac{W}{l_0^2} = 7.5$ ) で②部材も、許容応力度 (1) によって、断面が決定され、全ての部材が最大細長比の制約を受けず、許容応力度によって設計されている。

なお、図 3、図 4 には描かれていないが、 $\frac{W}{l_0^2} > 500$  で、 $\lambda_1 < 20$  となる。また  $\frac{W}{l_0^2} > 600$  では、最適構高  $\frac{H_{opt}}{l_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (②部材と①部材のなす角  $\theta = 54.7^\circ$ ) と一定値をとり、これ以上荷重を増加させても、最適は三角形の形は変わらない。

B 点が階段状を呈しているのは、許容応力度 (2) と (4) が細長比  $\lambda = 93$  において、不連続であることに因るものであると考えられる。

おわりに

以上から荷重の増大により、初期は最大細長比の制約を受け、後に許容応力度の制約を受けつつ、ある荷重までは最適構高は徐々に高くなるものの一定荷重以上では最適は三角形の形は変化しないこ

とがわかった。今後はさらに構造モデルをシミュレーションし、その最適格間数と最適構高について検討しなおして考えている。

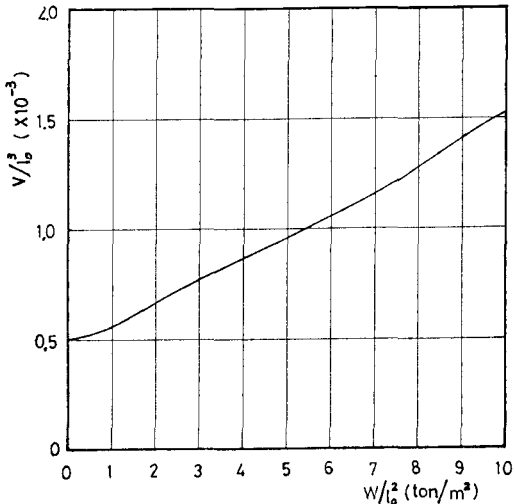


図 3. 荷重  $\frac{W}{l_0^2}$  と最小体積  $\frac{V}{l_0^3}$  の関係

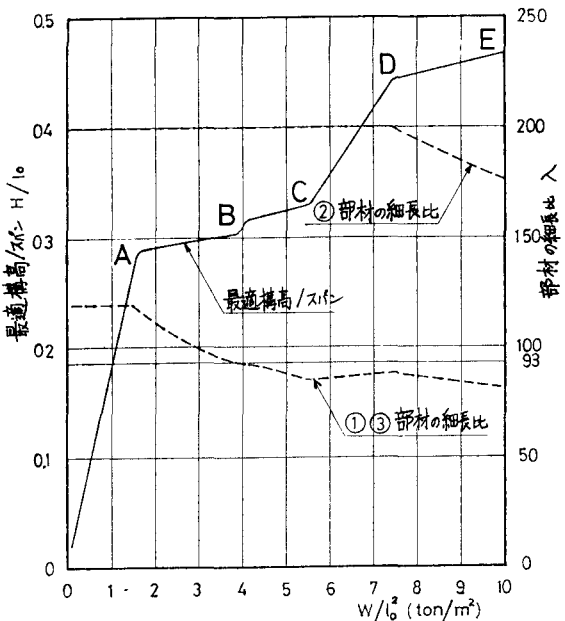


図 4. 荷重  $\frac{W}{l_0^2}$  と最適構高および部材細長比の関係

#### 参考文献

1) 日本鋼構造協会編：最適化手法の構造設計解法応用