

差分法による周辺自由の弾性床平板の応力解析

岩手大学 学生員 ○佐竹 拓夫
 岩手大学 正員 宮本 裕
 久慈工業高校 正員 安彦 敏郎

1. まえがき

本論文は、弾性基礎にある周辺自由平板の解法に、差分法を応用し、他の解法による計算値との比較を行なったものである。計算例では、くい付き板を地盤反力係数が局部的に異なる変厚板にモデル化し解析を行なってみた。

2. 解析方法

弾性基礎にある薄肉平板に対する基礎微分方程式は、板の中央面のたわみを w 、板の曲げ剛性を D 、分布荷重強度を P 、地盤のバネ定数を k とすると、次のように表わされる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} - \frac{k}{D} w \quad \dots (1)$$

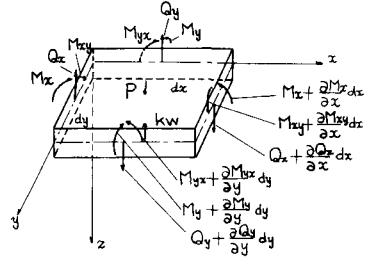


図-(1)

また、曲げモーメント M_x, M_y 、ねじりモーメント M_{xy} 、せん断力 Q_x, Q_y 、反力 V_x, V_y の諸断面力は、ポアソン比を ν とすると、次のように表わされる。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \quad V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

自由辺における境界条件は、 $x=0$ で $M_x = V_x = 0$ 、すなわち $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$ 、
 $y=0$ で $M_y = V_y = 0$ 、すなわち $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$ 、自由隅ではさらに $M_{xy} = 0$ 、すなわち $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ である。

式(1)の微係数を図(2)のような格子点配置において、点0に関して差分表示すると、次の式が得られる。
 $20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12} = \frac{h^4}{D} (P_0 - kw_0) \quad \dots (2)$
 ここに、 h は格子点間隔である。また、 M_x, M_{xy}, Q_x, V_x 等について同様の操作を施すと、

$$M_x = -\frac{D}{h^2} \{ w_1 + w_3 + (w_2 + w_4) - 2(1-\nu)w_0 \} \quad \dots (3)$$

$$M_y = -\frac{D}{h^2} \{ w_2 + w_4 + (w_1 + w_3) - 2(1-\nu)w_0 \} \quad \dots (4)$$

$$M_{xy} = -\frac{D}{4h^2} (1-\nu) (-w_5 + w_6 - w_7 + w_8) \quad \dots (5)$$

$$Q_x = -\frac{D}{2h^3} \{ 4(-w_1 + w_3) + w_5 - w_6 - w_7 + w_8 + w_9 - w_{11} \} \quad \dots (6)$$

$$Q_y = -\frac{D}{2h^3} \{ 4(-w_4 + w_2) - w_5 - w_6 + w_7 + w_8 - w_{10} + w_{12} \} \quad \dots (7)$$

$$V_x = -\frac{D}{2h^3} \{ 2(3-\nu)(-w_1 + w_3) + (2-\nu)(w_5 - w_6 - w_7 + w_8) + w_9 - w_{11} \} \quad \dots (8)$$

$$V_y = -\frac{D}{2h^3} \{ 2(3-\nu)(-w_4 + w_2) + (2-\nu)(-w_5 - w_6 + w_7 + w_8) - w_{10} + w_{12} \} \quad (9)$$

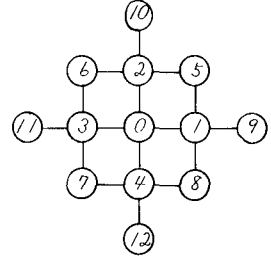


図-(2)

なお、周辺上の格子点において式(2)~(9)を適用すると、周辺の外側 ($x < 0, y < 0$) に2層の外点が生じ、周辺に隣接する内部格子点 ($x > 0, y > 0$) に式(2)、あるいは式(6)(7)(8)(9)を適用すると、一層の外点が生じる。外点は、存在しない仮定の点で、そのまま使用しても差支えないが、以後のコンピュータ計算における容量やその便宜性を考えて、ここでは外点をあらかじめ内部格子

$1 - \nu^2$		
$-8 + 4\nu + 4\nu^2$	$4 - 2\nu$	
$16 - 8\nu - 6\nu^2$	$-12 + 4\nu$	2
$-8 + 4\nu + 4\nu^2$	$4 - 2\nu$	
$1 - \nu^2$		

図-(3)

点に置き換えることにする。周辺自由について考えると2層目の外点は、境界条件として(8)式または(9)式の右辺=0を用いることによって、一層目は(3)(4)式および(5)式の右辺=0によって置き換えられる。一つの例として図-④の点⑪において式(2)を立てた場合の係数星を図-③に示す。

以上の操作に類似した操作を対称軸上、対称軸に隣接する点に対しても施すと、式(2)に関して図-④に示したように25種類の方程式が得られる。これらの式を各格子点に適宜に使用するとn元連立方程式(n:節点数)が得られ、wは次式より求まる。

$$\{W_n\} = \frac{h^4}{D} \left[\{K\} + \left\{ \frac{h^4}{D} kn \right\} \right]^{-1} \{P_n\} \quad (\text{ただし、}\left[\quad \right] \text{は対角行列})$$

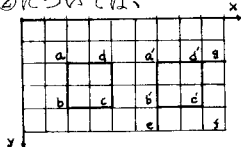
Mx, My, Qx, Qy 等は、この w 値を式(3)(4)(6)(7)等に代入することによって求めた。

3. 数値計算例

数値計算に使用した諸係数は、次のとおりである。図-①については

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 & h &= 25 \text{ cm} \\ \nu &= 0.1667 & k &= 10 \text{ kg/cm}^3 \\ t &= 15 \text{ cm} & P &= 1 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

図-②については、



$$\begin{aligned} E &= 1.4 \times 10^9 \text{ kg/m}^2 & \nu &= 0.25 & k &= 5 \times 10^6 \text{ kg/m}^3 (\text{abod, abcd では } 2.1 \times 10^9 \text{ kg/m}^3) \\ t &= 0.5 \text{ m} (\text{上図 aefg では } 1.0 \text{ m}) & P &= 1200 \text{ kg/m}^2 (\text{aefg では } 4000 \text{ kg/m}^2) & h &= 0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

ここで、tは板厚 Eは弾性係数である。また、図中の()内の数値は図-①では FEM値と級数値、図-②では FEM値である。図-②破線は FEMによるものである。

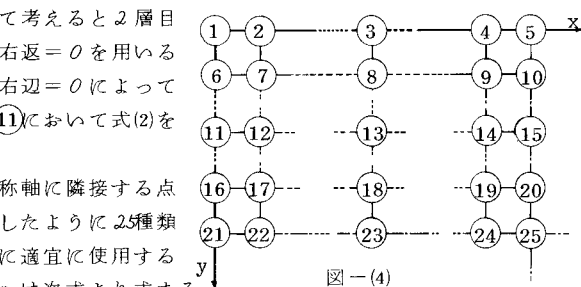
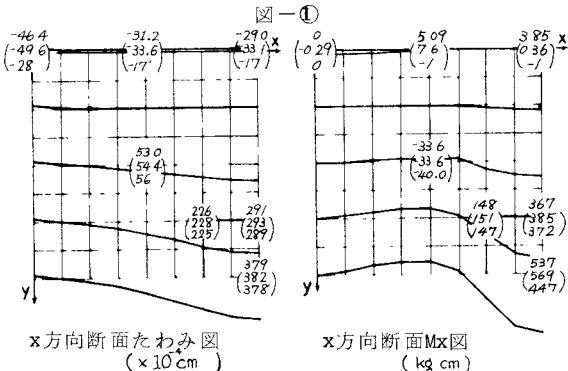
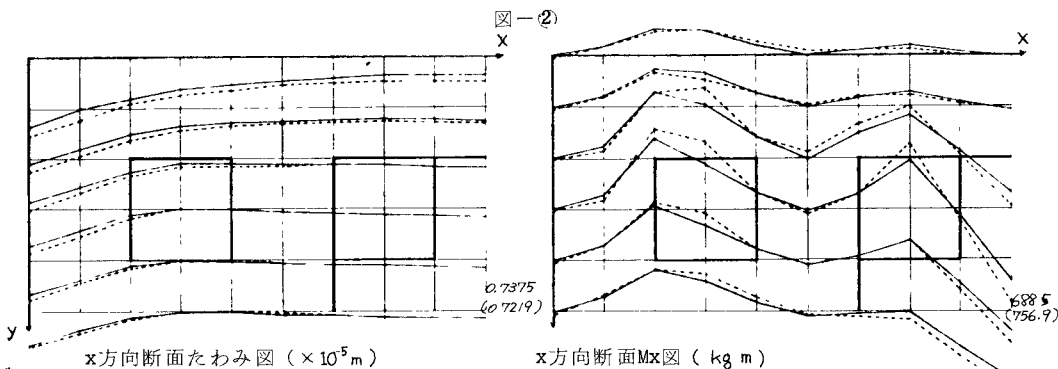


図-④



x方向断面たわみ図
(x 10³ cm)

x方向断面Mx図
(kg cm)



x方向断面たわみ図 (x 10⁵ m)

x方向断面Mx図 (kg m)

* 参考文献：能町純雄 弾性基礎にある四辺、四隅自由な 形板の曲げについて

土木学会論文集第32号