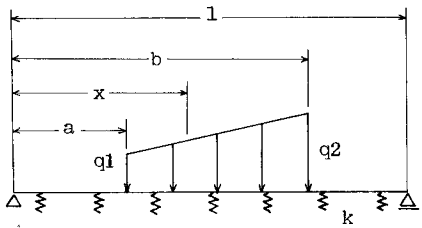
弾性床上箱形ラーメンの応力解析

岩手大学工学部　正員　○出戸　秀明
同　正員　宮本　裕
同　正員　岩崎　正二

1．まえがき

弾性床上のけたの剛性マトリックスをラプラス変換とAnfang Parameter法を用いて誘導した。荷重としては、分布荷重の一般形である台形分布荷重と集中荷重を扱っている。また、両端固定げたの他に、一端ヒンジ他端固定げたの剛性マトリックスと荷重項も誘導した。これらの剛性マトリックスと荷重項を用いて、変形法により、弾性床上箱形ラーメンの構造特性を明らかにした。

2．弾性床上のけたの剛性マトリックスと荷重項の誘導



図−1

図−1のような弾性床上のけたに分布荷重 $q(x)=Ax+B$ が作用するときの微分方程式は $EIy''''+ky=Ax+B$ となり、この式のラプラス変換は、

$$S^4Y(s)-S^3y(0)-S^2y'(0)-Sy''(0)-y'''(0)+\frac{k}{EI}Y(s)$$
$$=-\frac{Ab+B}{EI}\frac{e^{-sb}}{S}+\frac{Aa+B}{EI}\frac{e^{-sa}}{S}-\frac{A}{EI}\frac{e^{-sb}}{S}+\frac{A}{EI}\frac{e^{-sa}}{S}$$

軸方向力がないので($y''=-M(x)/EI$, $y'''=-Q(x)/EI$)・・・①を代入して、$Y(s)$について整理すると、

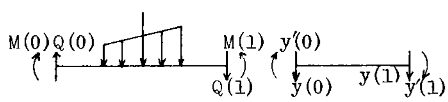
$$Y(s)=\frac{1}{S^4+\frac{k}{EI}}\left\{S^3y(0)+S^2y'(0)-S\frac{M(0)}{EI}-\frac{Q(0)}{EI}-\frac{Ab+B}{EI}\frac{e^{-sb}}{S}+\frac{Aa+B}{EI}\frac{e^{-sa}}{S}-\frac{A}{EI}\frac{e^{-sb}}{S}+\frac{A}{EI}\frac{e^{-sa}}{S}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

②式における前半が剛性マトリックスに関する項である。この部分だけ逆ラプラス変換すると、

$$z(x)=\cos\beta x\,\mathrm{ch}\beta x\cdot y(0)+\frac{1}{2\beta}(\sin\beta x\,\mathrm{ch}\beta x+\cos\beta x\,\mathrm{sh}\beta x)\cdot y\ (0)-\frac{1}{2\beta^2}\sin\beta x\,\mathrm{sh}\beta x\cdot\frac{M(0)}{EI}$$
$$-\frac{1}{4\beta^3}(\sin\beta x\,\mathrm{ch}\beta x-\cos\beta x\,\mathrm{sh}\beta x)\cdot\frac{Q(0)}{EI}\qquad ここで、\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

③式をxで3回微分し、$z'(x), z''(x), z'''(x)$を求め、これらの式に $x=l$ を代入し、①式に $x=l$ を代入して得た関係を用いて剛性マトリックスを求める。また②式における後半も同様にして荷重項を求める。これらの結果をマトリックス表示すると次のようになる。

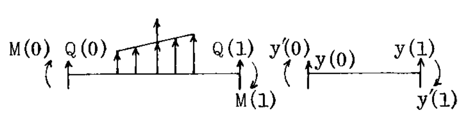
$$\begin{bmatrix}y(l)\\y'(l)\\M(l)/EI\\Q(l)/EI\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a11&a12&a13&a14\\a21&a22&a23&a24\\a31&a32&a33&a34\\a41&a42&a43&a44\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(0)\\y'(0)\\M(0)/EI\\Q(0)/EI\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C\,4\\C\,3\\C\,2\\C\,1\end{bmatrix}$$



図−2

このときの力と変位の正の向きは図−2のとおり。ここで、変形法を用いるためこれを図−3のように定義し、さらに上式を次のように変形する。

$$\begin{bmatrix}Q(0)/EI\\M(0)/EI\\Q(l)/EI\\M(l)/EI\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b11&b12&b13&b14\\b21&b22&b23&b24\\b31&b32&b33&b34\\b41&b42&b43&b44\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(0)\\y'(0)\\y(l)\\y'(l)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}H\,1\\G\,1\\H\,2\\G\,2\end{bmatrix}$$



図−3

このとき剛性マトリックスは次のようになっている。

$$\alpha\begin{bmatrix}4\beta^3(\sin\beta l\cos\beta l+\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & -2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & -4\beta^3(\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l\\ -2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & 2\beta(\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l-\sin\beta l\cos\beta l) & 4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & -2\beta(\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l)\\ -4\beta^3(\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & 4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & 4\beta^3(\sin\beta l\cos\beta l+\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & 2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l)\\ -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & -2\beta(\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & 2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & 2\beta(\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l-\sin\beta l\cos\beta l)\end{bmatrix}$$

ここで、$\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\beta l-\sin^2\beta l}$

3．剛性マトリックスの荷重項

A．両端固定げたに台形分布荷重が作用した場合

$$H1=-\frac{q2}{\beta U}\left\{(Kl+Ll)(1-Jc)-Il(Kc-Lc)\right\}+\frac{q1}{\beta U}\left\{\text{左の項のcにdを代入したもの}\right\}-\frac{q2-q1}{2\beta^2(b-a)U}\left[(Kl+Ll)\left\{2\beta(c-d)-Kc-Lc+Kd+Ld\right\}+2Il(Jc-Jd)\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$G1=\frac{q2}{2\beta^2U}\left\{2Il(1-Jc)-(Kl-Ll)(Kc-Lc)\right\}-\frac{q1}{2\beta^2U}\left\{\text{左の項のcにdを代入したもの}\right\}+\frac{q2-q1}{2\beta^3(b-a)U}\left[Il\left\{2\beta(c-d)-Kc-Lc+Kd+Ld\right\}+(Kl-Ll)(Jc-Jd)\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$H2=\frac{q2}{2\beta U}\left\{2(Ml+Nl)(1-Jc)-V(Kc-Lc)+U(Kc+Lc)\right\}-\frac{q1}{2\beta U}\left\{\begin{matrix}\text{左の項のcにdを}\\\text{代入したもの}\end{matrix}\right\}+\frac{q2-q1}{2\beta^2(b-a)U}\left[(Ml+Nl)\left\{2\beta(c-d)-Kc-Lc+Kd+Ld\right\}+V(Jc-Jd)+U(Ic-Id)\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$G2=\frac{q2}{2\beta^2U}\left\{V(1-Jc)+(Ml-Nl)(Kc-Lc)+UIc\right\}-\frac{q1}{2\beta^2U}\left\{\begin{matrix}\text{左の項のcにdを}\\\text{代入したもの}\end{matrix}\right\}+\frac{q2-q1}{4\beta^3(b-a)U}\left[V\left\{2\beta(c-d)-Kc-Lc+Kd+Ld\right\}-2(Ml-Nl)(Jc-Jd)-U(Lc-Kc-Ld+Kd)\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

B．一端ヒンジ他端固定げたに台形分布荷重が作用した場合

（左端ヒンジ）

$$H1=-\frac{\beta V}{Ml-Nl}\times(2)+(1)$$

$$G1=0$$

$$H2=\frac{2\beta Il}{Ml-Nl}\times(2)+(3)$$

$$G2=\frac{Kl-Ll}{Ml-Nl}\times(2)+(4)$$

（右端ヒンジ）

$$H1=-\frac{2\beta Il}{Ml-Nl}\times(4)+(1)$$

$$G1=\frac{Kl-Ll}{Ml-Nl}\times(4)+(2)$$

$$H2=\frac{\beta V}{Ml-Nl}\times(4)+(3)$$

$$G2=0$$

ここで、

$Ix=\sin\beta x\,sh\beta x$ ， $Jx=\cos\beta x\,ch\beta x$

$Kx=\sin\beta x\,ch\beta x$ ， $Lx=\cos\beta x\,sh\beta x$

$Mx=\sin\beta x\cos\beta x$ ， $Nx=sh\beta x\,ch\beta x$

$U=sh^2\beta l-\sin^2\beta l$

$V=sh^2\beta l+\sin^2\beta l$

$c=l-b$ ， $d=l-a$

C．両端固定げたに集中荷重が作用した場合

$$H1=-t\left[sh\beta l\left\{sh\beta(l-a)\cos\beta a+ch\beta(l-a)\sin\beta a\right\}-\sin\beta l\left\{\sin\beta(l-a)ch\beta a+\cos\beta(l-a)sh\beta a\right\}\right]\quad\cdots (5)$$

$$G1=\frac{t}{\beta}\left\{sh\beta l\,sh\beta(l-a)\sin\beta a-\sin\beta l\sin\beta(l-a)sh\beta a\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$H2=-t\left[sh\beta l\left\{\sin\beta(l-a)ch\beta a+\cos\beta(l-a)sh\beta a\right\}-\sin\beta l\left\{sh\beta(l-a)\cos\beta a+ch\beta(l-a)\sin\beta a\right\}\right]\quad\cdots (7)$$

$$G2=-\frac{t}{\beta}\left\{sh\beta l\sin\beta(l-a)sh\beta a-\sin\beta l\,sh\beta(l-a)\sin\beta a\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

D．一端ヒンジ他端固定げたに集中荷重が作用した場合

（左端ヒンジ）

$$H1=-\frac{\beta V}{Ml-Nl}\times(6)+(5)$$

$$G1=0$$

$$H2=\frac{2\beta Il}{Ml-Nl}\times(6)+(7)$$

$$G2=\frac{Kl-Ll}{Ml-Nl}\times(6)+(8)$$

（右端ヒンジ）

$$H1=-\frac{2\beta Il}{Ml-Nl}\times(8)+(5)$$

$$G1=\frac{Kl-Ll}{Ml-Nl}\times(8)+(6)$$

$$H2=\frac{\beta V}{Ml-Nl}\times(8)+(7)$$

$$G2=0$$

ここで、

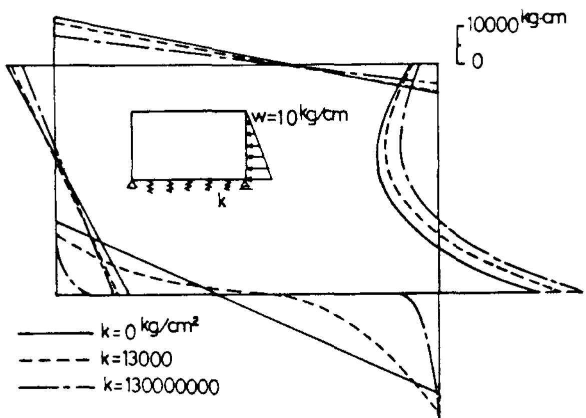
$$t=\frac{P}{sh^2\beta l-\sin^2\beta l}$$

V,Il,Kl,Ll,Ml,Nl は上に同じ。

4．数値計算例

これらの剛性マトリックスと荷重項により、弾性床上のけたやラーメンの応力解析ができる。図―4はその一例である。このときの部材の長さと断面２次モーメントは、上はりが 1035cm,4270000cm^4、柱が 625cm,5120000cm^4、下はりが 1035cm,6080000cm^4 とした。

なお、数値計算には岩手大学土木工学科の OKITAC DOS―50 を使用した。



図―4

参考文献

宮本,安彦,伊藤：弾性床上ラーメンの構造特性,４９年度東北支部講演概要集