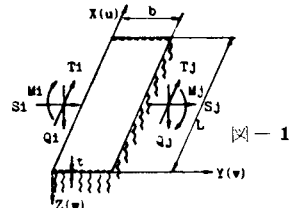


1. まえがき

近年、交通量の増加に伴ない地中の開発も活発に行なわれ、地下鉄、地下道、沈埋トンネル等の地下埋設構造物の建設が多くなってきている。従来これらの構造物の解析には断面方向にはボックスラーメン構造とし、軸方向には弾性床上的はりとして行なわれているようである。従ってこれらの解析では長手方向の力の変形と断面におけるラーメン作用を同時に考慮することができないため、立体的な応力性状の変化をつかむことができなかった。これらを詳しく検討するため、本論文ではまず弾性床上の帯板要素公式を示し、ボックスカルバートの側壁と頂板を普通平板の帯板要素群に、底板を弾性床上の帯板要素群に分割する有限帯板法により立体的な応力解析を試みたものである。

2. 解析理論

図-1に示すような弾性床上の帯板要素において、 x, y, z 方向変位を u, v, w , たわみ角を θ とする。 i 辺, j 辺の節線力を $\{T_i, S_i, Q_i, M_i, T_j, S_j, Q_j, M_j\}^T$ で表わし、これらの節線力に対応する節線変位を $\{u_i, v_i, w_i, \theta_i, u_j, v_j, w_j, \theta_j\}^T$ とする。



このとき帯板要素に関する全ポテンシャルエネルギーは微小変形を仮定すると次のような式となる。

$$\begin{aligned}
 We = & \int_0^l \int_0^b \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} + \frac{K}{D} w^2 \right] dx dy \right. \\
 & + \frac{1}{2} N \int_0^l \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2(-\nu) \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx dy \right\} \\
 & - \int_0^l \left\{ T_i u_i + S_i v_i + Q_i w_i + M_i \theta_i \right\} + \left\{ T_j u_j + S_j v_j + Q_j w_j + M_j \theta_j \right\} dx \\
 & - \int_0^l \int_0^b (X u + Y v + Z w) dx dy \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで X, Y, Z ,は帯板要素表面に作用する x, y, z 方向の分布外力成分である。 k は地盤反力係数である。 $D = Et^3 / 12 (1 - \nu^2)$, $N = Et / (1 - \nu^2)$ 。ここで変位と力を次のように展開する。

$$\begin{aligned}
 u = & \sum_{m=1}^{\infty} (f_1 u_{im} + f_2 u_{jm}) \cos \frac{m\pi}{l} x, \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} (f_1 v_{im} + f_2 v_{jm}) \sin \frac{m\pi}{l} x, \\
 w = & \sum_{m=1}^{\infty} (f_3 w_{im} + f_4 b \theta_{im} + f_5 w_{jm} + f_6 b \theta_{jm}) \sin \frac{m\pi}{l} x \\
 X = & \sum_{m=1}^{\infty} (f_1 X_{im} + f_2 X_{jm}) \cos \frac{m\pi}{l} x, \quad Y = \sum_{m=1}^{\infty} (f_1 Y_{im} + f_2 Y_{jm}) \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad Z = \sum_{m=1}^{\infty} (f_1 Z_{im} + f_2 Z_{jm}) \sin \frac{m\pi}{l} x, \\
 T_i = & \sum_{m=1}^{\infty} T_{im} \cos \frac{m\pi}{l} x, \quad S_i = \sum_{m=1}^{\infty} S_{im} \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad Q_i = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{im} \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad M_i = \sum_{m=1}^{\infty} M_{im} \sin \frac{m\pi}{l} x. \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

ただし $f_1 = 1 - \frac{y}{b}$, $f_2 = \frac{y}{b}$, $f_3 = 1 - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y^3}{b^3}$, $f_4 = \frac{y}{b} - 2 \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3}$, $f_5 = 3 \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y^3}{b^3}$, $f_6 = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3}$, j 辺の節線力についても, i 辺と同様に展開することができる。(2)式を(1)式に代入し、それぞれの節線変位係数による変分をとれば対応する節線力係数の式が次のように得られる。

$$\begin{pmatrix} T_{im} \\ S_{im} \\ Q_{im} \\ M_{im} \\ T_{jm} \\ S_{jm} \\ Q_{jm} \\ M_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & K_{15} & K_{16} & 0 & 0 \\ & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} & K_{26} & 0 & 0 \\ & & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & K_{37} & K_{38} \\ & & & K_{44} & 0 & 0 & K_{47} & K_{48} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & 0 & 0 \\ & & & & & K_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} \\ & & & & & & & K_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{im} \\ v_{im} \\ w_{im} \\ \theta_{im} \\ u_{jm} \\ v_{jm} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tbX_{im}/3 + tbX_{jm}/6 \\ tbY_{im}/3 + tbY_{jm}/6 \\ 7bZ_{im}/20 + 3bZ_{jm}/20 \\ b^2Z_{im}/20 + b^2Z_{jm}/30 \\ tbX_{im}/6 + tbX_{jm}/3 \\ tbY_{im}/6 + tbY_{jm}/3 \\ 3bZ_{im}/20 + 7bZ_{jm}/20 \\ -b^2Z_{im}/30 - b^2Z_{jm}/20 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{bN}{3} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 \frac{Gt}{b}, K_{12} = \left(\frac{\nu N}{2} - \frac{Gt}{2} \right) \left(\frac{m\pi}{1} \right), K_{15} = \frac{bN}{6} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 - \frac{Gt}{6}, K_{16} = - \left(\frac{\nu N}{2} + \frac{Gt}{2} \right) \left(\frac{m\pi}{1} \right), \\
K_{22} &= \frac{Gtb}{3} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 + \frac{N}{b}, K_{25} = -K_{16}, K_{26} = \frac{Gtb}{6} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 - \frac{N}{b}, K_{33} = D \left\{ \frac{1}{35} b \left(\frac{m\pi}{1} \right)^4 + \frac{1}{5b} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 + \frac{1}{b^3} \right\} + \frac{1}{35} bk \\
K_{34} &= D \left\{ \frac{1}{270} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^4 + \left(\frac{1}{5} + \nu \right) \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 + \frac{6}{b^2} \right\} + \frac{1}{270} k, K_{37} = D \left\{ \frac{9b}{70} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^4 - \frac{1}{5b} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 - \frac{1}{b^3} \right\} + \frac{9b}{70} k \\
K_{38} &= D \left\{ - \frac{1}{420} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 + \frac{6}{b^2} \right\} - \frac{1}{420} k, K_{44} = D \left\{ \frac{b}{375} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^4 + \frac{9b}{15} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 + \frac{4}{b} \right\} + \frac{b}{105} k, \\
K_{47} &= -K_{38}, K_{48} = D \left\{ - \frac{b}{140} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^4 - \frac{b}{15} \left(\frac{m\pi}{1} \right)^2 + \frac{2}{b} \right\} - \frac{b}{140} k, K_{55} = K_{11}, K_{56} = -K_{12}, K_{66} = K_{22}, \\
K_{77} &= K_{33}, K_{78} = -K_{34}, K_{88} = K_{44}. \quad (m=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

以上得られた基本式を座標変換マトリックスにより全体座標で表わし、要素ごとの重ね合わせを行なうことにより構造物全体の基本式を求めることができる。また本論文では帯板法による解析を行なうと同時に、簡略な方法として断面方向に底板が弾性床にあることを考慮したラーメン構造として、軸方向には折板構造として変位せん断方程式を用いる方法により対称変形の場合のたわみの微分方程式を誘導した。

$$\ddot{W} - H_1 \dot{W} + H_2 W = C_1(x) + \ddot{C}_2(x) \dots (4)$$

ただし $H_1 = \frac{4(1+\nu)K}{t_2 h} A$, $H_2 = 2K_3 B_1 A$, $\dot{C}_2 = \partial^2 f / \partial x^2$,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{B_1}{60EB} K_3 (K_1 + 2K_2) A_1 b^2 (2q_2 + 3q_3) \\
&+ \frac{B_1}{60EB} K_2 K_3 A_1 b^2 (5q_1 + 3q_2 + 2q_3 b^2) + \frac{B_1 b}{2E} q_1, \\
C_2 &= \frac{EC_1}{Gt_2 h B_1}, \quad A = A_2 - \frac{A_1^2 (K_1 + 2K_2) K_3}{B}
\end{aligned}$$

$$B_1 = - \frac{6(2ht_2 + bt_3 + bt_1)}{h^2 \{ (ht_2)^2 + 3b^2 t_1 t_3 + 2hbt_2(t_1 + t_3) \}},$$

$$B = (K_1 + 2K_2)(2K_2 + K_3 A_3) - K_2^2, \quad \beta^4 = k/4EI, \quad C = 1 / (sh\beta l + \sinh\beta l),$$

$$A_1 = C\beta^2 (sh\beta l - \sinh\beta l), \quad A_2 = 2C\beta^3 (ch\beta l - \cosh\beta l), \quad A_3 = C\beta (ch\beta l + \cosh\beta l).$$

上式において、w, 荷重をx方向にフーリエ級数に展開することにより解を得ることができる。

3. 数値計算例

1m四方の四辺単純支持の弾性床板上に、等分布荷重が載荷した場合の計算結果を他の解法結果と併に示す。次にボックスカルバートの計算では、底板中央点のたわみが地盤反力係数によってどのように変化するかを検討してみた。なお数値計算に用いた断面諸元は以下のとおりである。

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2, \quad h = 5 \text{ m},$$

$$b = 5 \text{ m}, \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0.45 \text{ m},$$

$$q_1 = 10 \text{ t/m}, \quad q_2 = 6.2 \text{ t/m},$$

$$q_3 = 11.6 \text{ t/m}, \quad k = 10^{-1} \sim 10^7 \text{ t/m}^3,$$

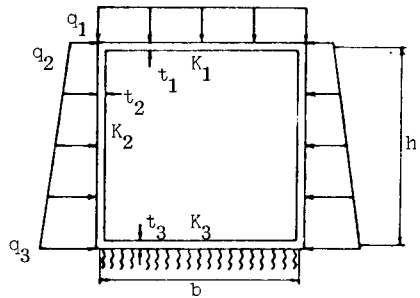
$$l = 15, 30, 50 \text{ m}.$$

なお、実際のボックスカルバートに

いては施工上側壁と頂板には鋼管ぐいが付随しており、これをどうとり扱うかは今後の課題といえよう。最後に本論文を作成するに当たり資料提供をいただいた岩手県庁都市計画課の沢口央氏と数値計算に御協力いただいた小泉仁根君に感謝の意を表します。

参考文献：能町、松岡その他、帯板を要素とする弾性床板上の解法について 昭和45年土木学会

北海道支部



	有限要素法	有限帯板法	級数解法
中央点の Mx	0.26914	0.26701	0.26679

$$q = 0.001 \text{ t/m}^2, \quad k = 0.5 \text{ t/m}^3, \quad (\times 10^{-4} \text{ t/m}) \\
t = 0.001 \text{ m}, \quad E = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

