

秋田大学 正 〇 薄木 征三, 稼農 知徳, 長谷部 薫

1. まえがき 非線形変位弾性論には物質固定座標を用いるラグランジュ表示と空間固定座標を用いるオイラー表示があるのは知られるところであり、物体の変形前後において物体内部の点の座標値が保持されるという利点の故に前者が用いられることが多い。しかし具体的に薄肉部材の大変位問題にこれを適用し、計算を行、得られる結果で誤りなく解釈するためには両者の表示法の違いを明確に認識しておく必要がある。

最近のTextでもオイラー表示は省略されているか¹⁾、あるいは両者の誘導の仕方に統一性がない²⁾ところも見られる。ここでは始めに両表示における基本単位ベクトルと格子ベクトルの関係を示し、着者ら以外の研究も含めて、その具体例を示す。

2. 基本単位ベクトルと格子ベクトル

2.1 ラグランジュ表示 (Fig. 1(a)).

円筒座標系を考へる。図は変形前の状態で互いに直交する3辺 $R_1 dx_1, R_2 dx_2, R_3 dx_3$ をもつ6面体微小要素が変位後には一般にはもはや直交しない3辺 $R_1^* dx_1, R_2^* dx_2, R_3^* dx_3$ をもつ要素へ移行した状態を示す。 R_i が基本単位ベクトル、 R_i^* が格子ベクトル (Lattice Vector) である。変形前の微小線素 $\overline{MN} = dR$ は変形後には $M^*N^* = dR^*$ に変化する。 x_i は物質固定座標であるから変形前の局所座標の原点 S は変形後は S^* に移動し、点 M^* の位置は $R^* = R + u$ となる。 R^* に対応する座標は (x_1^*, x_2^*, x_3^*) であり x_i^* が空間固定座標である。変形前では両者の原点 S と 0 も、座標 x_i と x_i^* も一致している。図に全微分公式から

$$dR^* = \frac{\partial R^*}{\partial x_i^*} dx_i^* = R_i dx_i^* \quad (1.a)$$

または

$$\begin{aligned} dR^* &= \frac{\partial R^*}{\partial x_i} dx_i = R_i^* dx_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (R + u) dx_i = \left(R_i + \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx_i \end{aligned} \quad (1.b)$$

変位ベクトル u は成分表示で

$$u = u_i R_i \quad (2)$$

以上及び以下では矢和規約を用いる。(2) × (1.b) より

$$R_i^* = R_i + \frac{\partial R_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} R_j \quad (3)$$

故に変形前後における線素のノルムの差は

$$dR^* dR^* - dR dR = (R_i^* dx_i)(R_i^* dx_i) - (R_i dx_i)(R_i dx_i)$$

1) Washizu, K: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon.
2) 長谷部 薫: 力学におけるテンソルと変形解析 (上), 学芸出版社

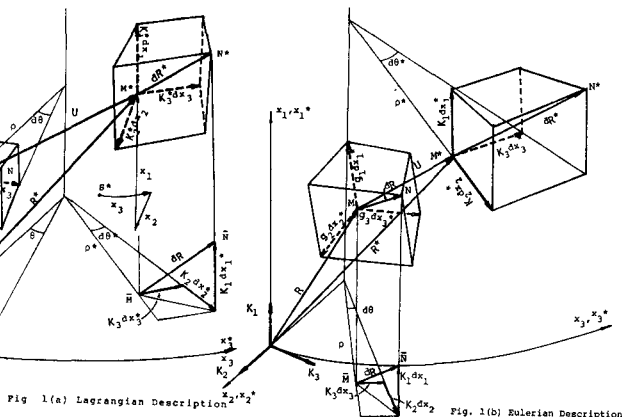


Fig. 1(a) Lagrangian Description Fig. 1(b) Eulerian Description

$$= \varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (4)$$

これにより、ラグランジュ表示のひずみ-変位関係、即ち Green のひずみテンソル ε_{ij} が導かれる。このとき (3) で円筒座標に対するフレネ-セレーの公式 $\partial R_2 / \partial \theta = R_3$, $\partial R_3 / \partial \theta = -R_2$ などの変数変換 $\partial / \partial x_i = \partial / \partial \theta$ を用いる。結局ラグランジュ表示では格子ベクトル R_i^* に全ての情報が含まれている。

2.2 オイラー表示 (Fig. 1(b)).

Fig. 1(b) に示すように変形後に直交する3辺 $g_1 dx_1^*, g_2 dx_2^*, g_3 dx_3^*$ をもつ6面体要素は変形前では一般には直交しない3辺 $g_1 dx_1^*, g_2 dx_2^*, g_3 dx_3^*$ をもつ。この格子ベクトル g_i は基本単位ベクトル R_i でのように表わされるが、オイラー表示の要点である。変形前の線素 $\overline{MN} = dR$ は図に全微分公式から、物質固定座標表示では

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x_i} dx_i = R_i dx_i \quad (5.a)$$

空間固定座標表示では

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x_i^*} dx_i^* = g_i dx_i^*$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i^*} (R^* - u) dx_i^* = (R_i - \frac{\partial u}{\partial x_i^*}) dx_i^* \quad (5.b)$$

(2)式と(5.b)式より格子ベクトル g_i は

$$g_i = R_i - \frac{\partial R_i}{\partial x_i^*} u_j - \frac{\partial u_j}{\partial x_i^*} R_j \quad (6)$$

となる。(4)式以下で述べたのと類似の関係式、
 $\partial R_2 / \partial \theta^* = R_3$, $\partial R_3 / \partial \theta^* = -R_2$ および変数
 変換 $\partial / \partial x_3^* = \partial / \partial \theta^*$ を用いると、線素の長さ
 の2乗の差は(1.a)式と(5.b)より

$$dR^* dR^* - dR \cdot dR = (R_m dx_m^* - R_n dx_n^*)^2$$

$$- (g_i dx_i^*) (g_j dx_j^*) = 2 Y_{ij} dx_i^* dx_j^* \quad (7)$$

式(6)の格子ベクトル g_i を代入すれば Cauchy
 のひずみテンソル Y_{ij} は容易に得られる。結局オイ
 ラー表示では変形前の格子ベクトル g_i に全ての情報
 が含まれている。なおひずみテンソル E_{ij} と Y_{ij}
 は E_{ij} , $Y_{ij} \ll 1$ のときはじめてひずみ成分とな
 るのであり厳密なひずみは E_{ij} , Y_{ij} の関数となる。

3. 棒の曲げ³⁾ および薄肉部材のおじり⁴⁾ の場合

3.1 曲げ

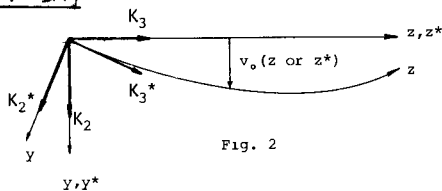


Fig. 2

(x_2, x_3) = (y, z) 平面内での棒の曲げを考える。
 ラグランジュ表示のひずみ-変位関係式に棒部材
 に対するオイラー・ベルヌーイの仮定を適用して得ら
 れるたわみ曲線 $v_0(z)$ の曲率は

$$K = - \frac{v_0''}{\{1 - (v_0')^2\}^{3/2}} \quad (8.a)$$

となる。 $'$ は z に関する微分であり長さの方向へ微分
 する。 $z > 0$ 上は重心軸へ伸張性を仮定した場合。
 これに対してオイラー表示に棒部材の仮定を適用する
 と良く知られた

$$K = - \frac{v_0''}{\{1 + (v_0')^2\}^{3/2}} \quad (8.b)$$

が得られることを西野らは報告している。 $'$ は z^* に
 関する微分であり $y^* = v_0$, $z^* = z + w_0$ である。

3.2 おじりと弱い曲げをうける曲線薄肉部材

ラグランジュ表示での仮定仕事の原理は
 3) 西野他: 軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論,
 土木学会論文報告集, オ239号, 1975年

$$\int_V \sigma_{ij}^* \delta \epsilon_{ij} dV$$

$$- \int_V F^* \delta u dV - \int_S T^* \delta u ds = 0 \quad (9)$$

σ_{ij}^* はラクランジュの
 応力テンソル, F^* , T^* は

物体力と表面力である。微小要素の体積 dV と物体表面
 の微小面積 ds の変形前後の差を無視すると F^* , T^*
 は実際の外力 F , T に等しい。このとき(9)式の
 オ3項を δU とおき, Fig. 3 の I 型断面を考える。部
 材端には保存力が作用している, つまり変形前後で方向
 と向きを変えない表面力が作用しているとする

$$\delta U = \int_S T^* \delta u ds = \left[\int_F (T_{xz}^* \delta u + T_{yz}^* \delta v + \sigma_z^* \delta w) dz \right]_0^{2\pi} \quad (10)$$

ここで T_{xz}^* は上述の意味において T_{xz}^* とかくべきも
 のであるが簡単のため T_{xz} とかいてある。 $\delta u, \delta v,$
 δw は変分 δu の成分であり, 重心軸の変位 $u_0, v_0,$
 w_0 および断面おじり φ によって強い曲げの場合
 まで $R/\rho \approx 1$ と見なせるとき

$$u = u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi) \quad (11.a)$$

$$v = v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \quad (11.b)$$

$$w = w_0 - y(\phi_x \cos \varphi - \phi_y \sin \varphi) - x(\phi_y \cos \varphi + \phi_x \sin \varphi) - \omega \cdot \psi_z \quad (11.c)$$

ここで $\phi_x = v_0' + w_0'/R$, $\phi_y = u_0'$, $\psi_z = \varphi' - u_0'/R$
 であり ω はおじり関数。今断面変位だけを考えることに
 して $v_0 = w_0 = \phi_x = 0$ とする。(11)と(10)に代入して

$$\delta U = [Q_z^* \delta u_0 + T_z^* \cos \varphi \delta \varphi - M_z^* \sin \varphi \delta \varphi + M_x^* \delta(\phi_y \sin \varphi) - M_y^* \delta(\phi_x \cos \varphi) - M_\omega^* \delta \psi_z]_0^{2\pi} \quad (12)$$

となる。 $\theta = 0$ で節点 i , $\theta = 2\pi$ で節点 j とすると節点変位ベ
 クトル g は

$$g = [u_i, \phi_{yi}, \varphi_i, \psi_{zi}; u_j, \phi_{yj}, \varphi_j, \psi_{zj}]^T \quad (13)$$

ここで $u_0(\theta=0) = u_i$ などとありてある。 $Q_z^*(\theta=0)$
 $= -Q_{zi}^*$, $M_z^*(\theta=0) = M_{zi}^*$ などとおき, 節点 i が自
 由端で Q_{zi}^* , M_{zi}^* , T_{zi}^* が作用するとき(12)は

$$\delta U = \delta g^T \cdot f \quad (14)$$

となり節点力ベクトル f が定義される。 f の内容は

$$f = [Q_{zi}^*, M_{zi}^* \cos \varphi_i, T_{zi}^* \cos \varphi_i - \phi_{yi} \sin \varphi_i M_{\omega}^*, 0, \dots] \quad (15)$$

自由端でおじりモーメントとして水平力 H_1^* (y^* 軸方向)
 と図のように作用するとき, おじりモーメント h
 は $T_{zi} = H_1^* h \cos \varphi_i = T_{zi}^* \cos \varphi_i$ となる。

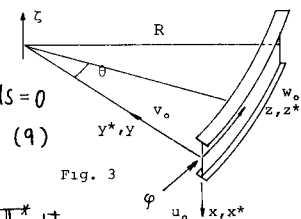


Fig. 3