エネルギ規準に基く粘弾/塑性体の降伏関数に関する一考察

東北大学工学部　学員 ○平井弘義
東北大学工学部　正員　佐武正雄

1. 緒言

粘弾性体の降伏規準については，まず Reiner と Weissenberg[1] によって von Mises の規準を粘弾性体に一般化した式が提案されている。Reiner[2] はこの規準を用いて，降伏応力に及ぼす載荷速度の影響やクリープ降伏現象を説明している。一方，Olszak[3] や立石[4] らによっても粘弾性体の降伏規準が論じられている。

しかしながら従来提案されてきたこれらの規準の妥当性あるいは力学挙動との対応関係はあまり明確にされていないと思われる。そこで本研究においてはこれらの式を一般化した形の規準式を提案し，この式と降伏挙動の関連性について検討し，提案された規準式の有用性を考察した。

なおここでは粘弾性体の降伏が静水圧に依存しない場合を取り扱っている。

2. 降伏規準の提案

保存エネルギである Helmholtz の自由エネルギと散逸エネルギ[5] のせん断変形に関与する部分から成る一次式がある限界値に達したときに降伏が生じうると仮定すると，次のような式が得られる。

$$f(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t G_1(t-\tau,\ t-\eta)\frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial e_{ij}(\eta)}{\partial\eta}\,d\tau\, d\eta$$

$$-\omega\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}G_1(t-\tau,\ t-\eta)\frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial e_{ij}(\eta)}{\partial\eta}\,d\tau\, d\eta\, dt$$

$$-\ k_0\ =\ 0\ , \qquad (1)$$

ここに，$f(t)$ は降伏関数であり，式(1)の第1項は保存エネルギのせん断変形に関する項，第2項は散逸エネルギのせん断変形に関する部分に材料定数 ω をかけたものであり，k_0 は限界値を示す。また G_1 はせん断緩和関数，e_{ij} は偏差ひずみ，t は時間を示す。

式(1)において

(i)　$\omega=0$ のとき　Reiner-Weissenberg の式
(ii)　$\omega=1$ のとき　Olszak の式

に帰着する。

いま降伏規準式(1)に含まれる材料定数 ω の意味を力学挙動の面から明らかにすることは，従来提案されてきた降伏規準の妥当性の検討を行なうことでもある。そこで第3節では時間依存性の力学挙動として降伏応力に及ぼす載荷速度の影響とクリープ降伏現象を取り上げる。

3. 降伏の時間依存性と降伏規準

粘弾性体の力学的性質は時間履歴に依存している。非常に速いかあるいは非常に遅いかという2つの極限の時間履歴について，その挙動は近似的に弾性体の挙動として表わせることが Gurtin と Herrera[6] によって示されている。

さて式(1)は非常に速い応力履歴（加速履歴）において次のようになる。

$$\lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right)=\frac{1}{2}J_1(0)S_{ij}(t)S_{ij}(t)-k_0=0,\qquad (2)$$

ここに，$f_\lambda(\frac{t}{\lambda})$ は加速履歴に対する時間 $\frac{t}{\lambda}$ での降伏関数であり，J_1 はせん断クリープ関数，S_{ij} は偏差応力である。また非常に遅い応力履歴（遅延履歴）については式(1)は次のようになる。

$$\lim_{\lambda\to 0} f_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right)=\frac{1}{2}J_1(\infty)S_{ij}(t)S_{ij}(t)-k_0=0,\qquad (3)$$

式(2)と(3)から明らかのようにこれらは弾性体の von Mises の式を表わしている。即ち加速およ

び遅延履歴に対して粘弾性体の降伏規準式(1)は弾性体のそれに帰着する。いま

$$J_1(0) \le J_1(t) \le J_1(\infty)\ , \qquad (4)$$

は一般的に成り立つので式(2)と(3)は図1の中に示されるように半径の大きさが異なる円となる。これは載荷速度の速い場合の降伏応力は遅い場合のそれより大きい値をとることを意味しており，軟鋼などに見られる現象である。

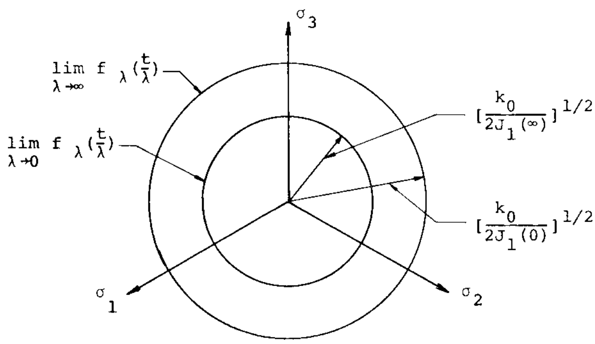

図1. π平面における加速履歴および遅延履歴に対する降伏関数

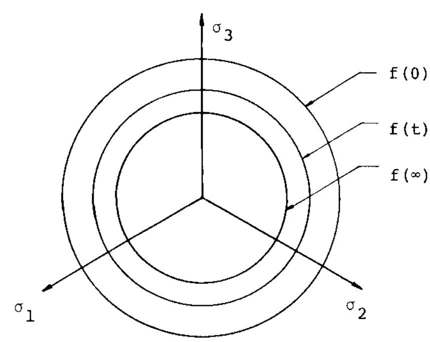

図2. 時間に依存する降伏関数

次にクリープによって生じる降伏について考えよう。そこで次のような一定載荷状態を仮定する。

$$\left.\begin{aligned} S_{ij}(t) &= S_{ij}h(t)\\ \sigma_{kk}(t) &= \Sigma_{kk}h(t)\ ,\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

ここに S_{ij} と Σ_{kk} は定数であり，$h(t)$ は Heaviside の単位ステップ関数である。式(5)によって与えられる応力条件は加速履歴に属するものである。式(5)を式(1)に代入すると次式を得る。

$$f(t) = S_{ij}S_{ij}\left[J_1(t) - \frac{1}{2}J_1(2t) + \frac{1}{2}\omega\{J_1(t) - J_1(0)\}\right] - k_0 = 0\ , \qquad (6)$$

式(6)は図2に示されるように，時間tの増加とともにその半径を減少してゆく円を表わしている。このことは加速履歴に対する降伏応力以下の一定応力を載荷した場合，式(6)を満たすある時間に降伏が生じうることを示し，これはクリープ降伏として知られている。

さて，$t \to \infty$ の極限においてクリープ降伏を生じさせうる応力と遅延履歴に対する降伏応力が等しいと仮定するならば式(6)と(3)から次式をうる。

$$\omega = 0\ , \qquad (7)$$

これは粘弾性体の降伏が保存エネルギのみに依存しうるという重要な意味を持っており，Reiner-Weissenberg の式に帰着する。しかし上に述べた仮定が用いられないならば $\omega \neq 0$ となり，その一例として Olszak の式が考えられる。

4. 結語

従来提案されてきた降伏規準の一般化した形を提案した。その降伏規準に含まれる材料定数ωの意味を特別な応力履歴を用いて検討することによって従来の規準の妥当性を考察し，合わせて本研究によって提案された規準の有用性を示した。

参考文献

1) Reiner, M. and Weissenberg, K.: Rheology Leaflet, vol.10, p 12, 1939. 2) Reiner, M.: J. Mech. Phys. Solids, vol.8, p 255, 1960. 3) Olszak, W.: Progress in Appl Mech., The Macmillan Comp. p.333, 1963, 4) 立石哲也，：機械学会論文集，42巻359号，p.2025，1976. 5) Christensen, R. M.: Theory of Viscoelasticity, Academic Press, 1971. 6) Gurtin, M. E. and Herrera, I.: Quartly Appl. Math., vol 23, p. 235, 1965.