変分不等式によるRoweのエネルギー比最小の原理の誘導について

東北大学工学部　正員　新関 茂
同　上　　正員　佐武正雄

1) まえがき

粒状体力学における応力ーダイレイタンシー式は，構成方程式の研究における最も重要な関係式の一つであると考えられる．Rowe[1,2]によって提案された応力ーダイレイタンシー式は実験結果と良い一致を示し，Gibson & Morgenstern[3]，Trollope & Parkin[4]，Roscoe & Schofield[5]，Scott等の関心を引いたが，彼等は一致して，Roweが理論構成の中で証明なしに用いた「エネルギー比最小の原理」を疑問視した．その後，Horne[7]はRoweの示唆を受け，粒状体の弾性変形，回転の影響などを無視して，エネルギー比最小の原理を考察し，この原理の成立することを示した．しかしながら，Mayerhof[8]や最上[9]は，エネルギー比最小の原理とその他の力学原理との関係について問題を提起し，また最近，Procter[10]と徳江[11]はHorneの証明について議論を行っている．Roweのエネルギー比最小の原理が，何らかの普遍的な自然法則と関連しているならば，その法則の研究は重要な課題であり，その応用は非常に広いものと考えられる．本論文は，凸関数の理論を用いて，非平衡熱力学における変分不等式を定式化し，この一応用として，Roweのエネルギー比最小の原理の誘導を行ったものである．

2) 変分不等式の基礎理論

ここでは，従来の変分不等式の理論の拡張について説明する．Banach空間の凸集合M上の連続で可微分な凸関数をKとすれば，次の不等式

$$\theta[K(W')-K(W)] \geqq K(W+\theta(W'-W))-K(W) \qquad (2.1)$$

が成立する．ただし

$$0 \leqq \theta \leqq 1, \quad {}^{\forall}W,\ W' \in M \qquad (2.2)$$

式(2.1)より

$$K(W')-K(W) \geqq \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}[K(W+\theta(W'-W))-K(W) \qquad (2.3)$$

上式の右辺をTaylor展開し，極限操作を行うことにより，次の変分不等式が得られる．

$$K(W')-K(W) \geqq \frac{\partial K}{\partial W}(W'-W) \qquad (2.4)$$

今，$\partial W/\partial t = \dot{W}$で$W'$は$W$の近傍の点と考え$W' = W + \dot{W}\Delta t$とおけば

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[K(W+\dot{W}\Delta t)-K(W)] \geqq \frac{\partial K}{\partial W} W \qquad (2.5)$$

式(2.3)の場合と同様にして，次の拡張された変分不等式

$$\dot{K} \geqq \frac{\partial K}{\partial W}\dot{W} \qquad (2.6)$$

が得られる．

3) 非平衡熱力学の基本法則

熱力学オ1法則の局所的な形式は

$$\rho\dot{e} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + q_{i,i} + \rho r \qquad (3.1)$$

と記される．ここに，ρは密度，eは単位質量当たりの内部エネルギー，σ_{ij}，ε_{ij}はそれぞれ応力及び歪テンソル，q_iは熱流束ベクトル，rは単位質量当たりの物体内部の発熱量である．

また，${}_i\dot{S}$を単位質量当たりの内部エントロピー生成率とすれば，熱力学オ2法則は

$${}_i\dot{S} \geqq 0 \qquad (3.2)$$

と表現される．外部との相互作用によるエントロピー変化率を${}_e\dot{S}$とすれば，全エントロピーの変化率$\dot{S}$は

$$\dot{S} = {}_i\dot{S} + {}_e\dot{S} \qquad (3.3)$$

と表わされる．${}_e\dot{S}$とq_i及びrとの関係は

$${}_e\dot{S} = (q_i/\theta)_{,i} + \rho r/\theta \qquad (3.4)$$

で，θは絶体温度である．一般に，内部エネルギーの変化率は，自由エネルギーの変化率と束縛エネルギーの変化率から構成されるので，次式が成立する．

$$\rho\dot{e} = \rho\theta\dot{S} + {}_E\sigma_{ij}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.5)$$

ここに，${}_E\sigma_{ij}$，${}_E\varepsilon_{ij}$はそれぞれ応力テンソル及び歪テンソルの可逆的な部分を表すものとする．式(3.5)は，Gibbsの関係式と呼ばれる．可逆的仕事率${}_E\sigma_{ij}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij}$を用いれば仕事率の非可逆的な部分$\hat{\sigma}$は

$$\hat{\sigma} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - {}_E\sigma_{ij}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.6)$$

で与えられる．上式と式(3.5)から

$$\rho\dot{e} = \rho\theta\dot{S} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \hat{\sigma} \qquad (3.7)$$

φを単位質量当たりの自由エネルギーとし，熱力学ポテンシャル間の関係式

$$e = \varphi + \theta S \qquad (3.8)$$

を用いれば，式(3.5)，(3.7)はそれぞれ

$$\rho\dot{\varphi} = -\rho\dot{\theta}S + {}_E\sigma_{ij}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.9)$$

$$\rho\dot{\varphi} = -\rho\dot{\theta}S + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \hat{\sigma} \qquad (3.10)$$

と書き換えられる．式(3.7),(3.8),(3.10)もまたGibbsの関係式と呼ばれる．式(3.1),(3.7)より，エントロピーの釣合式

$$\theta\dot{S} = \hat{\sigma} + g_{i,i} + \rho r \qquad (3.11)$$

が導びかれる．上式と式(3.3),(3.4),(3.6)から

$$\theta\,{}_i\dot{S} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - {}_E\sigma_{ij}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} + (\ln\theta)_{,i}\,g_i \qquad (3.12)$$

が得られる．

4) 非平衡熱力学における変分不等式

非平衡熱力学における変分原理の基礎である変分不等式の理論について説明する．自由エネルギーφの時間変化率は

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial_E\varepsilon_{ij}}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (4.1)$$

式(3.9)と式(5.1)を比較すれば

$$\partial\varphi/\partial\theta = -S,\quad \rho(\partial\varphi/\partial_E\varepsilon_{ij}) = {}_E\sigma_{ij} \qquad (4.2)$$

したがって，φは凸関数であるから，$W=(\theta, {}_E\varepsilon)$，$K=\varphi$とおけば，式(2.6)より次の変分不等式

$$\rho\dot{\varphi} \geq -\rho\dot{\theta}S + {}_E\sigma_{ij}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (4.3)$$

が得られる．式(3.6)を用いれば，式(4.3)は

$$\rho\dot{\varphi} \geq -\rho\dot{\theta}S + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \hat{\sigma} \qquad (4.4)$$

更に，上式に式(3.8)を代入すれば

$$\rho\dot{e} \geq \rho\theta\dot{S} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \hat{\sigma} \qquad (4.5)$$

と書き換えられる　また，内部エントロピー${}_iS$の変化率は

$${}_i\dot{S} = \frac{\partial_i S}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial_i S}{\partial_E\varepsilon_{ij}}\,{}_E\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial_i S}{\partial h_i}g_i \qquad (4.6)$$

ここに，h_iはBiotによって導入されたベクトルで$\dot{h}_i = g_i$である．式(4.6)と式(4.12)を比較し

$$\theta(\partial_i S/\partial\varepsilon_{ij}) = \sigma_{ij},\quad \theta(\partial_i S/\partial_E\varepsilon_{ij}) = -{}_E\sigma_{ij},\quad \theta(\partial_i S/\partial h_i) = -(\ln\theta)_{,i} \qquad (4.7)$$

第2法則により，${}_iS$は区分的凸関数となるから，式(4.3)の場合と同様にして，変分不等式

$$\theta\,{}_i\dot{S} \geq \hat{\sigma} + (\ln\theta)_{,i}\,g_i \qquad (4.8)$$

が得られる．式(3.3),(3.4),(4.8)より

$$\theta\dot{S} \geq \hat{\sigma} + g_{i,i} + \rho r \qquad (4.9)$$

また，式(4.5),(4.9)を辺々加えて，変分不等式

$$\rho\dot{e} \geq \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + g_{i,i} + \rho r \qquad (4.10)$$

が得られる．上式は，摂動を受けた安定な物体が自然界において，常に満足しなければならない条件を表わしている．変分不等式(4.10)の全ての力学量が真の値と一致する場合には熱力学の第1法則により等号が成立する．したがって「真の非平衡状態は，その近傍の摂動を受けた状態と比較し，内部エネルギーの変化率が最小で，外的な力学仕事率と熱仕事率の和は最大である．」．変分不等式(5.4)(5.5),(5.8),(5.9)についても全く同様なことが成立する．

5) エネルギー比最小の原理の誘導

Loweは砂のような粒状体を等球の集合にモデル化して考察し，粒子間の力の釣合い条件と変位の適合条件から　次の応力-ダイレイタンシー式

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(1 - \frac{\dot{V}}{V\dot{\varepsilon}_1}\right)\frac{\tan(\phi_\mu + \beta)}{\tan\beta} \qquad (5.1)$$

を導びいた．ここに，σ_i，ε_iはそれぞれ主応力及び主歪，Vは粒状体の体積，ϕ_μは物理的内部摩擦角，βは粒子間の接平面とσ_1方向の成す角度である．上式は，軸対称応力状態(3軸圧縮)の場合

$$\dot{E} = -(\sigma_1\dot{\varepsilon}_1/2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3) = \tan(\phi_\mu + \beta)/\tan\beta \qquad (5.2)$$

と書き換えることができる．上式においてLoweはエネルギー比$\dot{E}$が最小となるべきであると証明なしに主張した．$g_i = r = 0$で軸対称な主応力状態の場合，式(5.1)は

$$\rho\dot{e} \geq \sigma_1\dot{\varepsilon}_1 + 2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3 \qquad (5.3)$$

となり，更に，$\dot{E}$の正解を$\dot{E}^*$とすれば，

$$\dot{E} = -(\sigma_1\dot{\varepsilon}_1/2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3) \geq \dot{E}^* \geq 1 - \rho\dot{e}/(2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3) \qquad (5.4)$$

と書き換えられる．上式の力学量が真の力学的状態に一致する場合に等号が成立し，Roweの主張するエネルギー比最小の原理が成り立つ．

6) あとがき

本論文で定式化した変分不等式(5.4),(5.5),(5.8),(5.9),(5.10)は，非平衡熱力学における最も普遍的な変分原理を表現しており，従来のほとんど全ての変分原理，上下界定理および安定条件などを統一的に誘導することが可能であるが，これらについては別の機会に述べる予定である．

参考文献

(1) Rowe, P.W., Proc. Roy. Soc. A269, P.500, 1962　(2) Rowe, P.W. ASCE, Vol.89, SM3, P.37, 1963,
(3) Gibson, R.E. & Morgenstern, N, ASCE, Vol.89, SM6, P.127, 1963, (4) Trollope, D.H. & Parkin, A.K., 同上, p 129
(5) Roscoe, K.H. & Schofield, A.N., Vol.90, SM1, p.136, 1964, (6) Scott, R.F., 同上 p.133 (7) Horne, M.R., Proc. Roy. Soc. A286, p62, 1965, (8) Meyerhof, G.G., ASCE, Vol.90, SM1, p.135, 1964 (9) Mogami, T., Special lecture, 1st. Iranian Congress of Civil Engineering and Engineering Mechanics, 1972, (10) Procter, D.C., Geotechnique, Vol.24, No3 P.269, (11) Tokue, T., Soils and Foundations, Vol.18, No.1, P.1, 1978, (11) Duvaut, G. & Lions, J.L., Les Inéquations en mechanique et en Physique, Dunod, 1972