

1. はじめに

実用的な面からの噴流に関する研究においては、乱れ剪断応力を適当なアナロジーにより平均流速と結びつけて表わすことにより解析されてきた。この主な仮定は Prandtl による混合距離理論と渦動粘性係数であり、

Tollmien (1926) と Gortler (1942) は流程に直角な断面でそれらの係数が一定であるとして自由噴流について解いた。しかし、主流方向流速を相似とし、Reynolds 方程式を用いた解析により渦動粘性係数は断面で一定でなく横方向分布を持つ結果となった。¹⁾ 本研究は Prandtl の仮定である渦動粘性係数に対する考察と渦動粘性係数が横方向分布を持つことによるモーメント解法の妥当性について考察したものである。

2. 渦動粘性係数について

Prandtl による混合距離と渦動粘性係数を用いた乱れ剪断応力の表現は (1), (2) である。

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (l: \text{混合距離}) \quad \text{--- (1)} \quad \tau = \rho \varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\varepsilon: \text{渦動粘性係数}) \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) より (3) が求まり、 ε と l は流速勾配と結びついている。

$$\varepsilon = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad \text{--- (3)}$$

$\tau = -\rho \overline{u'v'}$ に $u' = l' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ を代入すると (4) となり、(2) と (4) より (5) を得る。

$$\tau = -\rho \overline{v' l'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{--- (4)} \quad \varepsilon = -\overline{v' l'} \quad \text{--- (5)}$$

この仮定の自由乱流への適用に際し、Prandtl²⁾ は乱流混合において横方向へ流体塊が動く長さが混合領域の幅と同じオーダーであるととし、混合領域の幅として半値幅（流速が軸上流速の $1/2$ となる噴流軸からの距離： b ）を用いると $l = Cb$ となる。噴流において半値幅は x の 1 次関数であることから混合距離は次式となる。

$$l = Cx \quad (C = \text{const}) \quad \text{--- (6)}$$

また、Prandtl は (5) において $v' \propto U_{\max}$, $l' \propto b$ とし、渦動粘性係数として (7) を定義した。

$$\varepsilon = K U_{\max} b \quad (K = \text{const}) \quad \text{--- (7)}$$

(6), (7) より混合距離、渦動粘性係数は流程断面で一定となる。

乱流拡散において混合が及ぶスケールは平均渦径 (L) のオーダーと考えられる。また、非乱流域において渦動粘性係数 (ε) は動粘性係数 (ν) となることから、自由乱流のように乱流と非乱流が間欠的に生じている場合、間欠因子を考慮する必要がある。以上のことから Prandtl の仮定を乱流特性値を用いて修正すると次式となる。

$$\varepsilon = \alpha U_{\max} L \gamma \quad \text{--- (8)} \quad l = C' L \gamma \quad \text{--- (9)}$$

図-1 は表層水平自由噴流の平均渦径の分布である。これより、平均渦径は最大流速勾配となる η ($=y/b$) が 0.8 の付近で最大値となり、周辺部で減少する傾向を示す曲線で表わすことができる。

軸上流速の減少割合と半値幅の広がりは次式のように求まっている。¹⁾

$$U_{\max}/U_0 = 5.05 (x/B_0)^{-0.876} \quad \text{--- (10)}$$

$$b/B_0 = 0.132 (x/B_0)^{0.876} \quad \text{--- (11)}$$

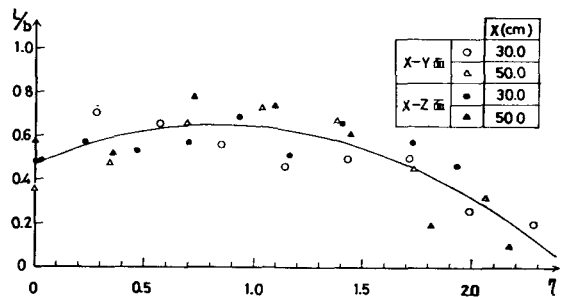


図-1 平均渦径の分布

間欠因子の計測は困難であることから、Heskestad³⁾による簡便法 $\gamma = 2.8/F.F$ (F.F: Flatness Factor) を用いて(8)から ε/u_{mb} を求めたのが図-2の破線である。ここで、Reynolds方程式から求めた ε/u_{mb} (実線)の分布に合うように係数を求めると $\alpha = 0.0373$ となった。噴流の中心部と周辺部で多少異なるが同じような傾向を示している。次に、(8)、(9)による定義を用いて(3)の ε と ℓ の関係から c' を求めると噴流の主要な領域で $c' \approx 0.3$ となり、混合距離は平均渦径の約 $1/3$ となった。

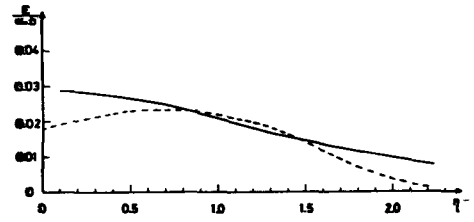


図-2 渦動粘性係数の分布

3. モーメント解法について

渦動粘性係数を x の関数とし、運動方程式に x 軸回りのモーメントをとり、 η で積分すると渦動粘性係数を求めることができる。既報¹⁾の基礎方程式より n 次モーメントをとると

$$\frac{b}{u_{mb}} \frac{d u_{mb}}{dx} \int_0^\eta \eta^{n+1} d\eta - \frac{1}{u_{mb}} \frac{d}{dx} (u_{mb}^2) \int_0^\eta \eta^n \frac{dF(\eta)}{d\eta} d\eta = \frac{\varepsilon}{u_{mb}} \int_0^\eta \eta^n \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dF(\eta)}{d\eta} \right) d\eta$$

$$\text{ここで、} F(\eta) = \int_0^\eta \eta f d\eta \quad \text{--- (12)}$$

表-1に積分モーメントの値とモーメントをとらないときの $\varepsilon/u_{mb} = 0.0184$ の値との誤差を示した。これから、 ε を断面で一定にした場合、高次モーメントになるにつれ右辺の積分値が増大し、それを保償するために ε/u_{mb} が小さくなる。

図-3は $x/B_0 = 20$ での計算値であり、高次モーメントになるにつれかなり小さく評価されている。

次に $x/B_0 = 20$ での渦動粘性係数の近似式を求めると次式となる。 $\frac{\varepsilon}{u_{mb}} = A \exp(-C\eta^2)$ $A = 0.02726, C = 0.2527$ --- (13)

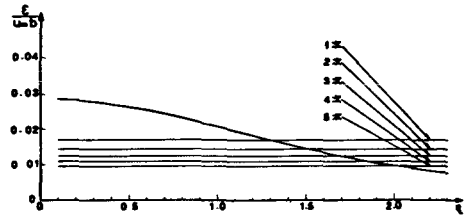


図-3 渦動粘性係数のモーメント解 (η^n)

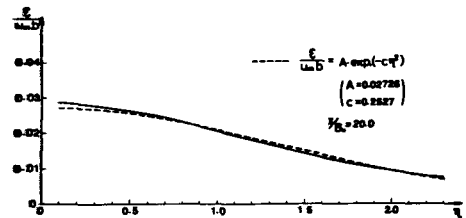


図-4 渦動粘性係数の分布とその近似式

図-4は渦動粘性係数の分布(実線)と(13)の近似式(破線)である。(13)を運動方程式に代入し、 η の n 次モーメントをとると次式となる。

$$\frac{b}{u_{mb}} \frac{d u_{mb}}{dx} \int_0^\eta \eta^{n+1} d\eta - \frac{1}{u_{mb}} \frac{d}{dx} (u_{mb}^2) \int_0^\eta \eta^n \frac{dF(\eta)}{d\eta} d\eta = A \int_0^\eta \eta^n \frac{d}{d\eta} (\exp(-C\eta^2) \frac{dF(\eta)}{d\eta}) d\eta \quad (14)$$

表-2に(14)の積分モーメントの値とAの値で評価した誤差を示した。これより誤差は小さくなり、モーメント解法においては渦動粘性係数に実際の分布を用いる必要がある。

4. おわりに

今回、乱れ剪断応力に対するPrandtlの仮定に対し、乱流特性値と結びつけて考察してみたが、普遍性を持たせるためには今後更に検討する必要がある。

本研究を行なうにあたり、終始御指導を賜った東北大学 岩崎敏夫教授に深く感謝いたします。また、研究に協力してくれた大嶋一成氏(東北大学 学生)に感謝します。

<参考文献> 1) 岩崎・田中; 第24回水試, pp.435~440, 1980. 2) Prandtl, L.; ZAMM, pp.241~243, 1942. 3) Heskestad, G.; Trans. ASME, pp 1~14, 1965.

表-1 表層水平自由噴流に対する η の積分モーメントの値と渦動粘性係数 ($x/B_0 = 20.0$)

次数n	$\int_0^\eta \eta^n d\eta$	$\int_0^\eta \eta^n \frac{dF(\eta)}{d\eta} d\eta$	$\int_0^\eta \eta^n \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dF(\eta)}{d\eta} \right) d\eta$	ε/u_{mb}	誤差(%)
1	0.2715	-0.4984	1.0845	0.0189	8.1
2	0.2602	-0.7805	2.8854	0.0144	21.7
3	0.2837	-1.3678	6.8107	0.0124	32.8
4	0.3753	-2.8274	16.6510	0.0108	41.3
5	0.5287	-5.4635	41.5415	0.0095	49.4

表-2 表層水平自由噴流に対して渦動粘性係数の分布を仮定した場合の η の積分モーメント ($x/B_0 = 20.0$)

次数n	$\int_0^\eta \eta^n d\eta$	$\int_0^\eta \eta^n \frac{dF(\eta)}{d\eta} d\eta$	$\int_0^\eta \eta^n \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dF(\eta)}{d\eta} \right) d\eta$	A	誤差(%)
1	0.2715	-0.4984	0.6678	0.02686	1.5
2	0.2602	-0.7805	1.5498	0.02678	1.8
3	0.2837	-1.3678	3.1771	0.02697	1.4
4	0.3753	-2.8274	6.5532	0.02741	0.5
5	0.5287	-5.4635	13.9958	0.02811	3.1