剛性マトリックス法による支点移動を生じたラーメンの応力解析.

岩手大学　正員　○嵯峨耕咲
〃　　　　正員　宮本　裕

1. まえがき.　本報告は、剛性マトリックス法により、支点移動を生じたラーメンの応力解析を行なったものである。

2. たわみ角法による解析.　例として、図−1のように、支点Dのみが水平方向にu、鉛直下方にvの移動をしたものとする。
まず、B点の水平移動を拘束して、支点Dに変位u・vを与え（図−2）その状態で拘束を解除したもの（図−3）として求められる。
各部材回転角は、柱AB：R、梁BC：β、柱CD：R−α　となり、
また、　$u=\alpha\cdot l$　、$v=\beta\cdot l$　であるから、Rのみ未知量となる。

$$\left.\begin{aligned}\psi&=-6ER\\ \psi_\alpha&=-6E\alpha\\ \psi_\beta&=-6E\beta\end{aligned}\right\}\text{とおくと}$$

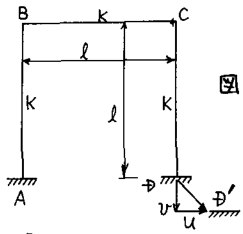
$$\left.\begin{aligned}&\text{節点方程式}\quad M_{BA}+M_{BC}=0\\ &\qquad\qquad\quad\; M_{CB}+M_{CD}=0\\ &\text{せん断方程式}\quad Q_{BA}+Q_{CD}=0\end{aligned}\right\}-(1)$$

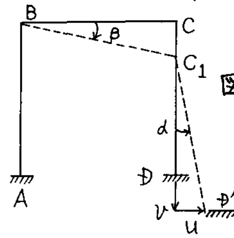
上式より

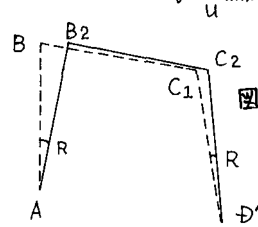
$$\left.\begin{aligned}\varphi_B&=-(7\psi_\alpha+12\psi_\beta)/42\\ \varphi_C&=(7\psi_\alpha-12\psi_\beta)/42\\ \psi&=(21\psi_\alpha+18\psi_\beta)/42\end{aligned}\right\}-(2)$$

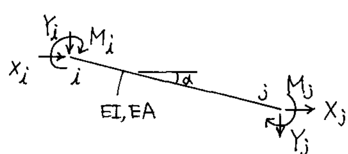
したがって

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=-EI(14\cdot u+6\cdot v)/7\cdot l^2\\ M_{BC}&=EI(7\cdot u-6\cdot v)/7\cdot l^2\\ M_{CD}&=EI(7\cdot u+6v)/7\cdot l^2\\ M_{DC}&=-EI(14\cdot u-6v)/7\cdot l^2\end{aligned}\right\}-(3)$$


図−1


図−2


図−3



3. 剛性マトリックス法による解析

$$\begin{Bmatrix}X_i\\Y_i\\M_i\\X_j\\Y_j\\M_j\end{Bmatrix}=\frac{E}{l}\begin{bmatrix}A\lambda^2+\frac{12I}{l^2}\mu^2 & (A-\frac{12I}{l^2})\lambda\mu & -\frac{6I}{l}\mu & -(A\lambda^2+\frac{12I}{l^2}\mu^2) & -(A-\frac{12I}{l^2})\lambda\mu & -\frac{6I}{l}\mu\\ & A\mu^2+\frac{12I}{l^2}\lambda^2 & \frac{6I}{l}\lambda & -(A-\frac{12I}{l^2})\lambda\mu & -(A\mu^2+\frac{12I}{l^2}\lambda^2) & \frac{6I}{l}\lambda\\ & & 4I & \frac{6I}{l}\mu & -\frac{6I}{l}\lambda & 2I\\ & & & A\lambda^2+\frac{12I}{l^2}\mu^2 & (A-\frac{12I}{l^2})\lambda\mu & \frac{6I}{l}\mu\\ & & & & A\mu^2+\frac{12I}{l^2}\lambda^2 & -\frac{6I}{l}\lambda\\ & \text{SYM.} & & & & 4I\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\\theta_i\\u_j\\v_j\\\theta_j\end{Bmatrix}\quad\begin{Bmatrix}\mu=\sin\alpha\\\lambda=\cos\alpha\end{Bmatrix}\quad-(4)$$

一般に剛性マトリックス法において，支点沈下応力のように与えられた変位による応力を求めるには，次のようにする。剛性マトリックスを重ね合わせて全体の剛性マトリックスを作った時，未知変位をu，与えられた変位をαとすると，外力の作用しない時は，

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X \end{Bmatrix}$$

上式より

$$K_{AA} \cdot u + K_{AB} \cdot \alpha = 0 \quad -(5)$$

$$\therefore \quad u = -K_{AA}^{-1} \cdot K_{AB} \cdot \alpha$$

これで未知変位が求められるから，あとは従来の剛性マトリックス法の計算によれば良い。

即ち図−1のラーメンの場合全体の剛性マトリックスにおいて支点条件 $u_A = 0$，$\theta_A = 0$，$\theta_D = 0$ 及び既知変位 $v_C = v$，$u_D = u$ また $v_B = 0$ を考慮して，計算を簡単にするため（4）式の EA の項を無視すると（曲げモーメントのみ考える），（5）式に相当する式は，

$$\begin{bmatrix} 12/\ell^3 & -6/\ell^2 & 0 & 0 \\ -6/\ell^2 & 8/\ell & 0 & 2/\ell \\ 0 & 0 & 12/\ell^3 & -6/\ell^2 \\ 0 & 2/\ell & -6/\ell^2 & 8/\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_B \\ \theta_B \\ u_C \\ \theta_C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6/\ell^2 & 0 \\ 0 & -12/\ell^3 \\ -6/\ell^2 & 6/\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} = 0$$

上式を直接解いても正しい解は得られない。

正しい解を求めるには，上式の第1式と第3式の合計を 0 とおく。

即ち $\Sigma X_B + \Sigma X_C = 0$

かつ，$u_B = u_C$ を考慮して整理すると

$$\begin{bmatrix} 4/\ell^3 & -1/\ell^2 & -1/\ell^2 \\ -6/\ell^2 & 8/\ell & 2/\ell \\ -6/\ell^2 & 2/\ell & 8/\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_B \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2/\ell^3 \\ -6/\ell^2 & 0 \\ -6/\ell^2 & 6/\ell^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} = 0$$

上式を解くと

$$\left.\begin{aligned} \theta_B &= u/2\ell + 6v/7\ell \\ u_B &= u/2 + 3v/7 \\ \theta_C &= -u/2\ell + 6v/7\ell \end{aligned}\right\}$$

以上を要素の剛性マトリックスに代入して，記号の定義を考慮して計算するとたわみ角法の解（3）式と同じ解を得る。

4. 考察

1. 剛性マトリックス法でラーメンを解くことができるが，Aの項を無視した剛性マトリックスを用いる時は，せん断方程式を考慮しなくてはいけない。
2. たわみ角法は，剛性マトリックス法の特別な場合であり，剛性マトリックス法においてAの項を無視すれば，（A＝∞とする）たわみ角法の解に一致する。

5. 参考文献

1). 酒井忠明，構造力学，技報堂
2). 小西一郎他，構造力学Ⅱ，丸善