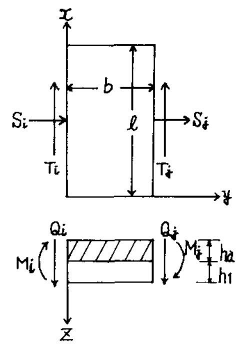
舗装を有する箱桁の動的応答解析

岩手大学工学部　正員　○岩崎 正二
岩手大学工学部　正員　嵯峨 耕咲

1．まえがき

近年橋梁構造において，舗装体を考慮した梁や鋼床版の理論的，実験的研究が盛んに行なわれるようになってきた。 本論文では舗装を有する箱桁の上フランジ中央部を単一集中荷重が一定速度で走行する場合を，上フランジ部分を二層板，下フランジ・ウェブ部分を鋼板の帯板要素と考え，モード解析法により動的応答解析を行ない，舗装体の変形係数，厚さなどの変化が箱桁の動的応答性状にどのような影響を与えるかを検討したものである。

2　解析理論



図−1　二層板要素

図−1 に示す二層板帯板要素において，x, y, z 方向変位を u，v，w，回転角を θ とし変位関数をつぎのように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} u &= u^{(1)}u_i + u^{(2)}u_j, \qquad v = v^{(1)}v_i + v^{(2)}v_j \\ w &= w^{(1)}w_i + w^{(2)}\theta_i + w^{(3)}w_j + w^{(4)}\theta_j \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで $[u^{(1)}, u^{(2)}] = [v^{(1)}, v^{(2)}] = [1-\eta, \eta]$

$[w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, w^{(4)}] = [1-3\eta^2+2\eta^3, b(\eta-2\eta^2+\eta^3), 3\eta^2-2\eta^3, b(-\eta^2+\eta^3)]$，

$\eta = \frac{y}{b}$，サフィクス i，j はそれぞれ $y=0$，$y=b$ 点での境界物理量を表わす。

x, y, z 軸方向の動的基礎微分方程式に上述の試験関数を用いてガラーキン法を適用すると

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - (\rho h)^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} u^{(k)} dy = 0 \quad (2) \qquad \int_0^b \left\{ \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - (\rho h)^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\} v^{(k)} dy = 0 \quad (3)$$

$$(k=1, 2)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - (\rho h)^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} w^{(k)} dy = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

ここで S_x，S_y は二次元応力問題における垂直応力，T_{xy} はせん断応力である。 M_x，M_y は y 軸，x 軸まわりの曲げモーメント，M_{xy} はねじりモーメントである。 ρ と h は密度と厚さであり，$(\rho h)^* = \rho_a h_a + \rho_1 h_1$ である。

面内変形に関する応力−ひずみ関係式と面外変形に関する断面力と曲率の関係式は

$$\left.\begin{aligned} S_x &= N^* \frac{\partial u}{\partial x} + N_u^* \frac{\partial v}{\partial y} \\ S_y &= N^* \frac{\partial v}{\partial y} + N_u^* \frac{\partial u}{\partial x} \\ T_{xy} &= (Gh)^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}\right\} \quad (5) \qquad \left.\begin{aligned} M_x &= -\left(K^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_u^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -\left(K^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_u^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -(K^* - K_u^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ここで N^*，K^* は二層板の伸び剛性及び曲げ剛性を表わす。 又 $(Gh)^* = G_a h_a + G_1 h_1$．

式(5) を式(2)，(3) に，式(6) を式(4) に代入し部分積分を施すと x に関して4階，t に関しては2階の線形連立微分方程式が得られる。 式(2) から得られる方程式には $\cos\frac{m\pi}{\ell}x$，他式から得られる式に $\sin\frac{m\pi}{\ell}x$ を乗じ $0 \leq x \leq \ell$ で有限フーリエ変換を施し，境界条件に留意して整理すると次のような二層板帯板要素の動的基本式が求まる。

$$[K]\{\overline{S}_m[\delta]\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\overline{S}_m[\delta]\} = \{\overline{S}_m[f]\} \quad (7)$$

ここで $\{\overline{S}_m[\delta]\}$，$\{\overline{S}_m[f]\}$ はそれぞれ境界節点変位，節点断面力ベクトルの像関数であり次のように表わされる。

$$\{\overline{S}_m[\delta]\} = [\, C_m[u_i], S_m[v_i], S_m[w_i], S_m[\theta_i], C_m[u_j], S_m[v_j], S_m[w_j], S_m[\theta_j] \,]^T$$

$$\{\overline{S}_m[f]\} = [\, C_m[T_i], S_m[S_i], S_m[Q_i], S_m[M_i], C_m[T_j], S_m[S_j], S_m[Q_j], S_m[M_j] \,]^T$$

又 $C_m[u_i]=\int_0^{\ell} u_i \cos\frac{m\pi}{\ell}x\,dx,\quad S_m[v_i]=\int_0^{\ell} v_i \sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx$ で他もこれに準ずる。

$(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

[K], [M]は剛性マトリックス，質量マトリックスで以下のように表わされる。

$$[K]=\left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 & H_{15} & H_{16} & 0 & 0 \\ & H_{22} & 0 & 0 & -H_{16} & H_{26} & 0 & 0 \\ \hdashline & & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 & H_{37} & H_{38} \\ & & & H_{44} & 0 & 0 & -H_{38} & H_{48} \\ \hdashline & & & & H_{11} & -H_{12} & 0 & 0 \\ & & & & & H_{22} & 0 & 0 \\ \hdashline & & & & & & H_{33} & -H_{34} \\ & \text{Sym.} & & & & & & H_{44} \end{array}\right] \quad (8)$$

$$[M]=(\rho h)^{*}b\left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} & 0 & 0 & 0 \\ & M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} & 0 & 0 \\ \hdashline & & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 & M_{37} & M_{38} \\ & & & M_{44} & 0 & 0 & -M_{38} & M_{48} \\ \hdashline & & & & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & M_{11} & 0 & 0 \\ \hdashline & & & & & & M_{33} & -M_{34} \\ & \text{Sym.} & & & & & & M_{44} \end{array}\right] \quad (9)$$

ここで係数マトリックスの要素は

$H_{11}=(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{bN^*}{3}+\frac{(Gh)^*}{b},\ H_{12}=(\frac{m\pi}{\ell})\{\frac{N_u^*}{2}-\frac{(Gh)^*}{2}\},\ H_{15}=(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{bN^*}{6}-\frac{(Gh)^*}{b},\ H_{16}=-(\frac{m\pi}{\ell})\{\frac{N_u^*}{2}+\frac{(Gh)^*}{2}\}$

$H_{22}=(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{(Gh)^*}{3}+\frac{N^*}{b},\ H_{26}=(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{(Gh)^*b}{6}-\frac{N^*}{b},\ H_{33}=(\frac{m\pi}{\ell})^4\frac{13b}{35}K^*+(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{12}{5b}K^*+\frac{12}{b^2}K^*$

$H_{34}=(\frac{m\pi}{\ell})^4\frac{11b^2}{210}K^*+(\frac{m\pi}{\ell})^2(\frac{K^*}{5}+K_u^*)+\frac{6}{b^2}K^*,\ H_{37}=(\frac{m\pi}{\ell})^4\frac{9b}{70}K^*-(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{12}{5b}K^*-\frac{12}{b^3}K^*$

$H_{38}=-(\frac{m\pi}{\ell})^4\frac{13b^2}{420}K^*+(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{1}{5}K^*+\frac{6}{b^2}K^*,\ H_{44}=(\frac{m\pi}{\ell})^4\frac{b^3}{105}K^*+(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{4b}{15}K^*+\frac{4}{b}K^*$

$H_{48}=-(\frac{m\pi}{\ell})^4\frac{b^3}{140}K^*-(\frac{m\pi}{\ell})^2\frac{b}{15}K^*+\frac{2}{b}K^*,\ M_{11}=\frac{1}{3},\ M_{15}=\frac{1}{6},\ M_{33}=\frac{13}{35},\ M_{34}=\frac{11b}{210},$

$M_{37}=\frac{9}{70},\ M_{38}=-\frac{13b}{420},\ M_{44}=\frac{b^2}{105},\ M_{48}=-\frac{b^2}{140}.\ \ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

式(7)を構造体を構成している各要素に適用し，構造物全体の動的基本式を求めると

$$[K_{st}]\{S_m[\delta]\}+[M_{st}]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{S_m[\delta]\}=\{S_m[P]\} \quad (10)$$

集中荷重が一定速度 C_p で走行する場合の解は，自由振動解と特殊解を加え合わせることにより求めることができる。初期条件を $t=0$ で $\{\delta\}=\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\}=0$ とすると完全解は

$$\{S_m[\delta]\}=\{S_m[\delta_s]\}\sin\frac{m\pi}{\ell}C_p t-C_p[V]\left\lceil\frac{\sin\frac{m\pi}{\ell}C_e t}{C_e}\right\rfloor[V]^{-1}\{S_m[\delta_s]\}\quad(C_p\neq C_e) \quad (11)$$

上式中 $\lceil\ \rfloor$ は対角マトリックスを意味し，C_e は第e次モードの位相速度を表わす。又[V]はモードベクトルからなるマトリックスであり，$\{S_m[\delta_s]\}$ は特殊解から得られる変位振幅ベクトルの像関数を意味する。真の値は，これらをx方向に逆変換することにより求められる。

3 数値計算例

解析にあたっては箱桁を5要素に分割して計算した。数値計算に用いた断面諸元は以下のとおりである。

$E_1=2.1\times10^7\ t/m^2,\ E_a/E_1=0,\ 1/30\ \ 1/70$

$\rho_a=0.28\ t\ sec^2/m^2,\ \rho_1=0.80\ t\cdot sec^2/m^2$

$h_a=0.05m,\ h_1=0.01m,\ C_p=30m/sec$

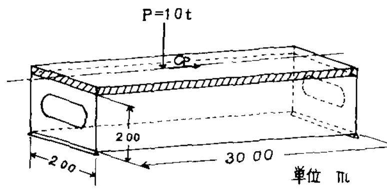


図-2 数値解析に用いたモデル

なお数値計算にあたって菊池英雄氏に多大の協力を得ました。ここに感謝の意を表します。

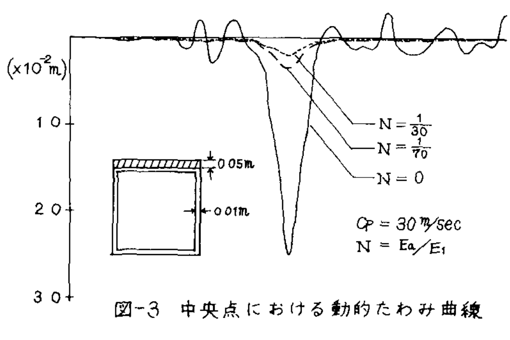


図-3 中央点における動的たわみ曲線

参考文献

芳村，藍澤；有限帯板法による舗装体を考慮した開きリブ鋼床版の局部応力解析について；昭和52年度北海道支部

岸，能町；箱桁の移動荷重による振動性状について 第31回土木学会全国大会