

薄肉はりの有限なねじれ変形解析

秋田大学 正員 〇 薄 木 征 三

秋田大学 正員 後 黒 知 徳

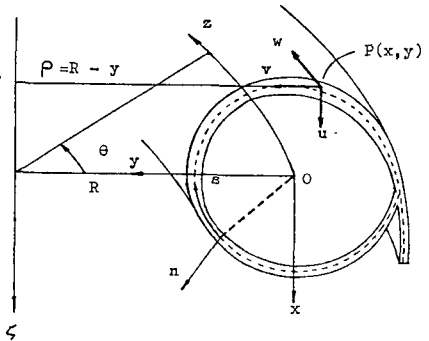
秋田大学 正員 長 谷 部 蓮

1. まえがき 薄肉曲線工型ゲタは曲線格子ゲタ橋などの基本的構造形式として用いられる。これは見方を変えると円弧状の初期子整をもった直線工型ゲタと見なすことができる。すると鉛直荷重によって生ずる工型ゲタのねじれ変形は種座反現象の進行と解釈でき、これは有限ねじれ変形理論によって解析されねばならない。薄肉工型ゲタの有限ねじれ変形を解析する基礎となるのは非線形のひずみ-変位関係式と応力のつり合い式を基礎として、棒理論の仮定を適用して得られる変位場であり、曲線工型ゲタの場合も工学的に妥当と考えられる変位場は早くから提案されていた。しかし剛性法や還元法で数値解析を行う場合、変位場に含まれる $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ (φ は断面のねじれ角) を 2 次、もしくは 3 次の Taylor 展開を用いていたために大きなねじれ変形は扱えなかった。

ここでは $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ を Taylor 展開しない場合の変位場と応力場を用いて、剛性法によって有限ねじれ変形解析を行ってみたので報告する。

2. 理論

座標系を図-1 のように定める。 (x, y, z) および (s, n, ξ) はゲタの変形とともに移動する物質固定座標である。物質固定座標表示 (Lagrange 表示) の非線形ひずみ-変位関係式で部材軸方向変位 w の微係数の 2 次項を落とし、残りの非線形項を w を断面の剛体変位 w_0 で近似し、さらに曲線工型の曲率半径の差異を無視 ($R/\rho \div 1$) する。このひずみ-変位関係式に棒理論の仮定を適用して得られる変位場は



$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi), \quad v = v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \\ w &= w_0 - x(\phi_y \cos \varphi + \phi_x \sin \varphi) - y(\phi_x \cos \varphi - \phi_y \sin \varphi) - \omega \cdot \psi_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで $\phi_y = u'_0$, $\phi_x = v'_0 + w'_0/R$, $\psi_z = \varphi' - \phi_y/R$ であって、 u_0, v_0, w_0 は原点 O の x, y, z 軸方向の変位であり、 $'$ は $z = R \cdot \xi$ に関する微分である。 ω はねじれ角である。非零のひずみ成分は ϵ_θ と γ_s であってひずみ-変位関係は導くと

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta + \frac{1}{R} \{ \phi_x^2 + \phi_y^2 + (x^2 + y^2) \varphi'^2 \} - x(\phi_y' \cos \varphi + \phi_x' \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{R}) \\ &\quad - y(\phi_x' \cos \varphi - \phi_y' \sin \varphi - \frac{1 - \cos \varphi}{R}) - \omega \cdot \psi_z \\ \gamma_s &= \theta \cdot \psi_z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで $\epsilon_\theta = w'_0 - v'_0/R$, $\psi_z = \varphi' - \phi_y/R$ であって θ は断面回転角 $\theta = z \cdot n$ である。

3. 剛性方程式

式(1), (2)を基礎式として増分形式の仮想仕事の原理を用いる。このときある荷重状態でのねじれ角を φ^0 とする。わずかな荷重増分によるねじれ角増分を $\Delta\varphi$ とすると, $\sin(\varphi^0 + \Delta\varphi)$, $\cos(\varphi^0 + \Delta\varphi)$ は増分 $\Delta\varphi$ について Taylor 展開する。次に微小変位の場合と同様に, 曲線要素内部での変位 u_0, v_0, w_0 を φ の3次式で近似し剛性方程式を用いる。結果は

$$\left. \begin{aligned} (K_a + N^0) \delta a + (K_{ac} + T^0) / \chi \delta c &= f_a - W_a^0 \\ (K_{ac} + T^0)^T \delta a + (K_c + M^0 + M_n^0) \delta c &= f_c - W_c^0 \end{aligned} \right\} \text{----- (3)}$$

$\delta a, \delta c$ は節点変位増分 (Δ の記号省略) であり, 1節点で4個の自由度をもつ。 f_a, f_c は x 軸に垂直のおよび曲線に沿った節点荷重ベクトルである。 W_a^0, W_c^0 は残差ベクトルである。

紙面の都合上結果の一部をかく以下のようにである。

$$\begin{aligned} K_a &= \int_0^{30} \{ \alpha_e (B_x^T + \phi_x^T B_{px}) (B_x + \phi_x B_{px}) + (\cos \varphi^0 + \sin \varphi^0 / \chi) B_{Kx}^T B_{Kx} \} d\theta / I_e \\ K_{ac} &= \int_0^{30} \chi \dot{\phi}_y \cos \varphi^0 B_{Kx}^T B_{pq} d\theta / I_e + \int_0^{30} \{ (B_x^T + \phi_x^T B_{px}) \{ \alpha_e \chi \dot{\phi}_y B_{py} + (1 + \chi) \dot{\phi}_0 B_{ip} \} \\ &\quad + \chi B_{Kx}^T \{ (1 - \chi) \sin \varphi^0 \cos \varphi^0 (B_{Ky} + \phi_y^T B_{ip}) - \dot{\phi}_y \sin \varphi^0 B_{pq} \} \} d\theta / I_e \\ N^0 &= \int_0^{30} N^0 B_{px}^T B_{px} d\theta / I_e, \quad T^0 = \int_0^{30} (\chi M_x \sin \varphi^0 - M_y \cos \varphi^0) B_{Kx}^T B_{pq} d\theta / I_e \quad (4) \end{aligned}$$

ここで $B_x, B_{px}, B_{py}, \dots$ は x は $E_x = B_x \delta a, \phi_x = B_{px} \delta a, y = B_{py} \delta c, \dots$ などと定義された (1×8) の行列であり θ の関数である。 $\dot{\phi}_x^0, \dot{\phi}_y^0, \dot{\phi}_0^0$ は θ / I_e に関する微分である。

また
$$\alpha_e = \frac{EFL_e^2}{EJ_x}, \quad k = \frac{GJ_T}{EJ_y}, \quad \chi = \frac{J_x}{J_y}, \quad \lambda_e^2 = \frac{EC\omega}{EJ_y L_e^2}, \quad \gamma_e = \frac{EJK}{EJ_y L_e^2} \quad (5)$$

であってこれらは無次元断面量である。また式(4)の N^0, M_x^0, M_y^0 も全て無次元断面力であり式(2)によって節点変位 $\delta a, \delta c$ で表される。式(5)で $J_K = \int_F (x^2 + y^2)^2 dF$ である。 K_{ac} で「ブーラー」上の項は y 軸まわりの曲げを考えると T^0 は曲げとねじれ変位の連成を表す。 T^0 で「ブーラー」上の項は同じく x 軸まわりの曲げによる初期応力を表す。

4. 計算例 右図はJ型標準断面の場合の, $\sin \varphi, \cos \varphi$ を3次近似した場合(破線)と本報告の結果(実線)の比較である。縦軸 $P_x / P_{cr} = 1$ は座屈荷重を表す。

$\sin \varphi, \cos \varphi$ は Taylor 展開して剛性マトリクス, 初期応力マトリクスは複雑になるだけであり, 何らメリットは無いようである。増分量についてのみ Taylor 展開するのが鍵である。

右図で断面諸量は

$$\begin{aligned} \alpha_e &= 7.56 \times 10^2, \quad k = 8.66 \times 10^5, \\ \chi &= 2.96 \times 10^2, \quad \lambda_e^2 = 1.85 \times 10^{-3}, \\ \gamma_e &= 6.13 \times 10^2 \quad \text{である。} \end{aligned}$$

なお式(4)のマトリクスは Gauss 数値積分により機械的に求められる。

