

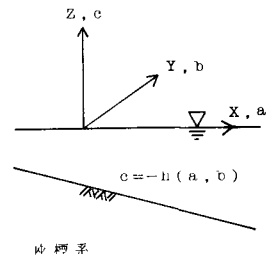
1 はじめに

津波や高潮などの長周期波の陸上への遡上現象を推定する方法としては、波の運動を木粒子個々について初期位置からの変位量で取り扱う物質座標系の長波の方程式を用いて数値計算^{1,2)}することが非常に有利であることが知られている。しかしながら、物質座標系による表現法は測定が困難であるなどの理由により、従来よく用いられて来た空間座標系のものに比べ研究が³⁾おこなわれていることも事実である。

本研究では、空間座標系の浅水理論に相当する非線型長波の方程式の誘導をおこなっている。これは、先に報告³⁾をした、2次元問題としての非線型長波の式を3次元問題へ拡張したものである。

2 変動量で表現された方程式

非圧縮性流体の非粘性運動を考える。右図のような水域に対して静水時を時刻の原点に選び、この静水時に座標 (a, b, c) なる位置に存在した木粒子が、任意の時刻には座標 (X, Y, Z) に到達し、この木粒子の受けている圧力を P とする。物質座標系の連続及び運動方程式は



$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(a, b, c)} = 1 \quad \text{---(1)} \quad \frac{\partial X}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P, Y, Z)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(X, P, Z)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(3)} \quad \frac{\partial Z}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(X, Y, P)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(4)}$$

となる。ここで ρ は密度、 g は重力加速度である。

いま、木粒子の移動先での座標 (X, Y, Z) を木粒子の初期位置からの変位量 (x, y, z) で表わし、この木粒子の受けている圧力 P を初期位置での圧力 $-\rho g c$ とその変動量 p で表わすと、式(1)～(4)は次の如く変動量に関する方程式に変換できる。

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(5)}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{\partial y}{\partial b}\right) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{P}{\rho} + gz\right) - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{P}{\rho} + gz\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, z)}{\partial(a, c)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(6)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{\partial x}{\partial a}\right) \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{P}{\rho} + gz\right) - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{P}{\rho} + gz\right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p, z)}{\partial(b, c)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, p, z)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(7)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial c} - \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, p)}{\partial(a, c)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(y, p)}{\partial(b, c)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(x, y, p)}{\partial(a, b, c)} = 0 \quad \text{---(8)}$$

3 水平床の上の長波の非線型方程式

ここでは、水平床における長波について考える。まずはじめに、長波近似として次の2つの仮定を設ける。第1は、木粒子の鉛直方向加速度が無視可能ということ。第2は、木粒子の水平方向変位は鉛直方向には変化しないということ。この2つの仮定は、本来ならば無次元化および摂動により評価するべきであるが、ここでは論議しない。2次元問題では、すでに証明³⁾している。

自由水面における境界条件は、 $c = 0$ で $P = 0$ --- (9)、水底における境界条件は、水平床であることを考えると $c = -h$ で $z = 0$ --- (10) となる。

先に述べた仮定を用いて、鉛直方向に積分された長波の方程式を導く。連続方程式(5)を鉛直方向に積分し、

水底の境界条件(10)を適用すると、

$$z = -(c+h) \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} / \left\{ 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} \quad \text{---(11)}$$

となる。そして、いま初期位置として $c=0$ すなわち木表面に存在していた木粒子の鉛直変位を η とおくと、この式から長波近似としての連続方程式が求まり、

$$\left\{ 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} \eta + h \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} = 0 \quad \text{---(12)}$$

となる。次に、鉛直方向の運動の式を鉛直方向に積分し、自由水面での条件(9)を適用すると、

$$p = \rho g c \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} / \left\{ 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} \quad \text{---(13)}$$

となる。この(11)～(13)式を水平方向の運動方程式に代入することにより、長波の運動方程式として、

$$\left\{ 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial(\eta,y)}{\partial(a,b)} \right\} = 0 \quad \text{---(14)}$$

$$\left\{ 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + g \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial(\eta,x)}{\partial(b,a)} \right\} = 0 \quad \text{---(15)}$$

が求まる。この(12)、(14)、(15)が物質座標系による非線型長波の方程式である。

4 任意な地形形状についての長波の非線型方程式

任意な地形形状を表わす水底の境界条件は、 $c = -h(a,b)$ で $z = h(a,b) - h(a+x, b+y)$ --- (16) となる。ここで、 $h(a,b)$ は初期位置における静水深であり、 $h(a+x, b+y)$ は木粒子の移動先々における静水深である。この(16)を用いて、水平床と同様な変算をすると、連続の方程式が

$$\left\{ 1 + \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} \left\{ \eta + h(a+x, b+y) - h(a,b) \right\} + h(a,b) \left\{ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\} = 0 \quad \text{---(17)}$$

となる。運動の方程式は水平床のものと同じになる。

5 結言

本研究で誘導した運動方程式(14)、(15)と連続方程式(12) または(17)と首藤が先に導いた線型⁴⁾のものとは比較すると、線型のものは1に比べ $\left\{ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right\}$ が無視できる場合であることがわかる。このことは、木粒子の変位が微小であると考えた場合に相当する。従って、津波の遡上を考える場合、汀線付近の木粒子は沖合のものに比べ大きな変位ををすると考えられ、従来の線型のものに比べより良い近似となると思われる。

この研究をおこなうにあたり、東北大学工学部首藤伸夫教授には多くの助言を賜った。ここに記して厚く謝意を表する。

参考文献

- 1) 首藤伸夫・後藤智明：津波の遡上に関する数値解析，第24回海講，1977.
- 2) 首藤伸夫・後藤智明：越喜来湾に対する津波の遡上計算，第15回自然災害シンポジウム，1978.
- 3) 後藤智明：物質座標系による非線型長波，第25回海講，1978.
- 4) N.Shuto：THREE DIMENSIONAL BEHAVIOUR OF LONG WAVE ON A SLOPING BEACH, Coastal Eng. in Japan, 1968.