

Implicit 差分スキームによる津波の遡上解析

東北大学 正会員 ○後藤和博
東北大学 正会員 首藤伸夫

1. はじめに

津波の陸上部分への遡上状況の解析については、水粒子に固定した物質座標を用いる表現、即ち *Lagrange* 風に現象を解く方程式系が提案されている。¹⁾ この式系を線型問題として解く場合に、斜面勾配、入力波の周期及び波高、差分格子間隔、時間間隔等によって、汀線部水粒子の微振動、あるいは発散が現われることがあるが、これらの不安定現象の発生原因は差分式の安定性によるものと思われる。また、この現象を除去する方法として、既に不等間隔差分法による解が研究されているが²⁾、本論文では、比較的安定条件のゆるい Implicit 差分スキームをとりあげ、従来の空間方向 Implicit 型式と共に、時間方向にも Implicit 型式を考慮してスムージング効果を加えることにより、等間隔差分でも安定解が得られるよう検討を行ったものである。

2. 基本方程式

Lagrange の運動方程式、及び連続の式より長波のオ1次近似式として、次の方程式が求められる。³⁾

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial a} \left\{ -h(a) \frac{\partial x}{\partial a} - h(a+x) + h(a) \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\eta = -h(a) \frac{\partial x}{\partial a} - h(a+x) + h(a) \quad (2)$$

ここで g ; 重力加速度, a ; $t=0$ における水粒子の水平座標, x, η ; 水表面にある粒子の初期位置 a からの水平, 垂直変位, $h(a), h(a+x)$; 地点 a 及び $a+x$ での水深。

3. Implicit 差分スキーム

時間および空間方向に対して、次の様な差分スキームを採用する。

$$\frac{\partial x}{\partial a} \approx \lambda \Delta^2 x_{i,j-1} + (1-2\lambda) \Delta^2 x_{i,j} + \lambda \Delta^2 x_{i,j+1} \quad (3) \quad \text{ここで, } \lambda; \text{時間方向 relaxation factor } (0 \leq \lambda \leq 0.5)$$

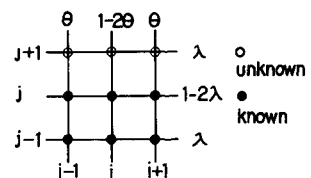
$$\frac{\partial x}{\partial t} \approx \lambda \Delta^2 x_{i,j-1} + (1-2\lambda) \Delta^2 x_{i,j} + \lambda \Delta^2 x_{i,j+1} \quad (4) \quad \theta; \text{空間方向 relaxation factor } (0 \leq \theta \leq 0.5)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \approx \theta \Delta^2 x_{i,j-1} + (1-2\theta) \Delta^2 x_{i,j} + \theta \Delta^2 x_{i,j+1} \quad (5) \quad i, j; \text{空間方向ステップ, 時間方向ステップ}$$

relaxation factor λ, θ の導入により上式は、次の如く分類される。

- $\lambda \neq 0, \theta = 0$; 従来の空間差分の時間方向 Implicit 差分スキーム
- $\lambda = 0, \theta \neq 0$; 時間差分の空間方向 Implicit
- $\lambda \neq 0, \theta \neq 0$; 時間、空間の両方向を同時に平均化した Implicit
- $\lambda = 0, \theta = 0$; 従来の Explicit 差分スキーム

図-1 差分格子の関係



4. 初期条件・境界条件

初期条件は、時間の原点に於て静水状態を考える。汀線境界条件は 汀線に存在した水粒子の格子点を $i=0$ とし、これより $\pm \Delta a$ だけ離れた格子点を $i = \pm 1$ として次式を与えた。 $\zeta_{0,j} = -h(x_{0,j})$, $x_{-1,j} = 2x_{0,j} - x_{1,j}$ (6)
沖側境界条件は、 $\zeta_{L,j} = A \sin(\frac{2\pi}{T}t)$ を与え、 $x_{L,j+1} = x_{L,j} - 2\Delta t \frac{\sqrt{gh}}{h} A \sin(\frac{2\pi}{T}j\Delta t)$ とした。(7)
ここで L ; 沖側境界格子点, A, T ; 入力波の振幅・周期, h は水深を意味し一定である。汀線境界条件、沖側境界条件についての詳細は参考文献⁴⁾を参照されたい。

5. 数値計算

数値計算は、入力波として $A=0.3\text{m}$, $T=250\text{sec}$ の正弦波を与えた。地形は一様水深 $h=5\text{m}$ とし、途中から勾配 $1/30$ の斜面を有する簡単な形状とする。また斜面での反射の影響が沖の入力地点に到達する時間までとし、水路幅の変化及び海底摩擦の影響は考慮に入れないものとする。差分間隔は $\Delta a=50\text{m}$, $\Delta t=0.5\text{sec}$ で行う。

5. 計算結果

表-1 比較計算結果一覧表

a) b) c) の各ケースについての比較計算結果を表-1, 図-2 に示す。a) では $T=250 \text{ sec}$ の正弦波に振幅 0.05 m 周期 20 sec 程度の細かな振動がのっており、すべての入に対して現れた。これは差分化による、汀線部分の微小区間によって生じるセイツユと考えられる。⁵⁾ このように、従来の空間差分に時間方向のスムージングを施しても、微振動は除去できないように思われる。

b) では $\lambda=0$ の時に $X_{i,j+1}$, $X_{i,j-1}$, $X_{i+1,j}$ の水深を含んだ係数項が0となり、Implicit 差分方程式としての解は安定しない。

c) では、 λ, θ が同時に0の時はa)と同様の微振動が現われ、 $0.125, 0.25$ で安定解が得られた。しかし、 $0.375, 0.50$ では発散した。このスキームによると、時間方向には $X_{i,j} = \frac{1}{2}(X_{i,j+1} + X_{i,j-1})$ の相加平均となり、空間方向には $X_{i,j} = \frac{1}{8h_i}(h_{i+1} - h_{i-1} + 4h_i)X_{i+1,j} + \frac{1}{8h_i}(h_{i-1} - h_{i+1} + 4h_i)X_{i-1,j}$ で水深を媒介としてスムージングがなされた形となっている。また、 θ, λ の値については差分中心点 $X_{i,j}$ の重みか0.5以下にならない範囲を限度とし、0.25が最も有効であると思われる。次に、 λ と θ を0.25に固定して、斜面勾配、水深を変化させた場合の計算結果を表-2, 図-3 に示す。また、 $\lambda=\theta=0$ として Explicit 差分スキームによる場合と比較した。Explicit 型では発散する d-3, d-4 のケースに対して、初期に少し振動らしき状態がみられるものの、時間方向の相加平均効果によって、安定した解が得られるのがわかる。理論値との比較を図-4 に示すと、いずれも誤差は9%以内であった。

6. おわりに

長波の第1次近似式に対して、relaxation factor を用いて、空間方向、時間方向共に同時に平均化した形の3段 Implicit 差分スキームを採用し、連立方程式を解くならば、時間方向には、 $\theta \neq 0$ の時、 $X_{i,j} = \frac{1}{2}(X_{i,j+1} + X_{i,j-1})$ 、空間方向には $\lambda \neq 0$ の時、 $X_{i,j} = \frac{1}{8h_i}(h_{i+1} - h_{i-1} + 4h_i)X_{i+1,j} + \frac{1}{8h_i}(h_{i-1} - h_{i+1} + 4h_i)X_{i-1,j}$ からなるスムージングの関係をもつ解 X が求まる。これらの効果によって、斜面勾配が急な為に Explicit 差分では発散する形状に対しても、比較的安定した解を得ることができた。

参考文献

- 1) 3) 首藤伸夫. Standing Waves in front of a Sloping Dike. proc. 13th Conf on Coastal Eng. ASCE, 1972.
- 2) 5) 首藤伸夫 佐藤 淳. 津波遡上の数値解法に関する検討
- 4) 首藤伸夫, 後藤智明. 津波の遡上に関する数値解析.

	a) $0 \leq \lambda \leq 0.5, \theta = 0$					b) $\lambda = 0, 0 \leq \theta \leq 0.5$				c) $0 \leq \lambda \leq 0.5, 0 \leq \theta \leq 0.5$			
NO.	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4
λ	0.0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.0	0.0	0.0	0.0	0.125	0.250	0.375	0.500
θ	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.125	0.250	0.375	0.500
結果	微振動	微振動	微振動	微振動	微振動	不安定	不安定	不安定	不安定	安定	安定	不安定	不安定

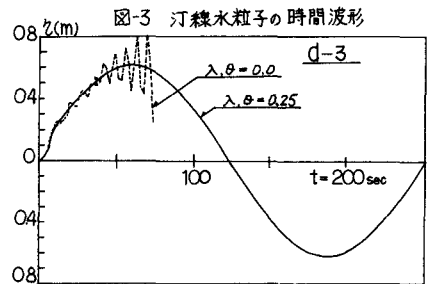
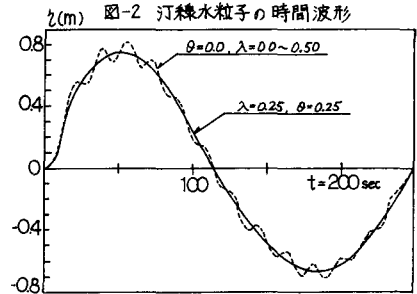
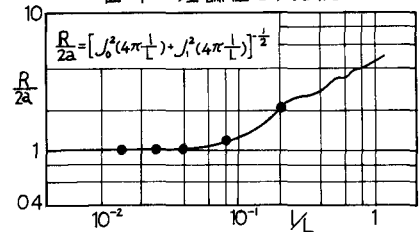


表-2 計算条件とその結果

ケース	d-1	d-2	d-3	d-4	d-5
諸元					
A (m)	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
T (sec)	250	250	250	250	250
h (m)	5	10	20	20	40
α (勾配)	$1/30$	$1/10$	$1/5$	$1/2$	$1/30$
Δa (m)	5	10	10	20	30
Δt (sec)	0.5	0.2	0.5	1.0	1.0
結果	$\lambda, \theta = 0.0$ 微振動	微振動	発散	発散	振動
	$\lambda, \theta = 0.25$ 安定	安定	安定	安定	安定

図-4 理論値との比較



才33回年講, 昭和52年度東北支部研究発表会
才24回海講, 1977.