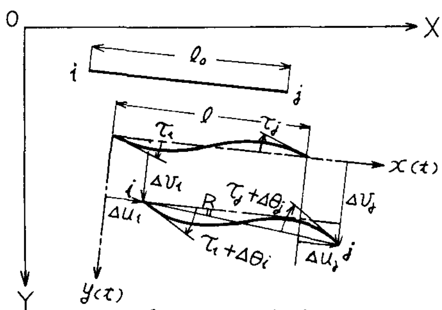
移動荷重に対するアーチの弾塑性応答

東北大学　学生員　○盛川 功
東北大学　正員　倉西 茂

1 まえがき　本報告は，列車荷重を想定した移動荷重に対する，アーチの弾塑性応答を数値積分により求めたものである。

2 解析方法　本報告で用いた方法は，次の通りである。平面骨組構造物全体の有限変形を考慮した，増分形式の運動方程式を求める。次にその運動方程式を数値積分することにより動的応答を求める。以下にその概要を述べる。図1に示す骨組要素の運動を考える。部材座標系を，時間増分前（時刻 t）の変形状態に設定し，各時刻の状態量を次のように定義する。



図－1　部材座標系

Δu_i, Δu_j	：端節点変位の x 方向増分
Δv_i, Δv_j	：　〃　y 方向増分
$\Delta\theta_i$, $\Delta\theta_j$	：　〃　たわみ角増分
R	：部材回転角の増分
${}^t\tau_i$, ${}^t\tau_j$	：時刻 t の部材端のたわみ角
u , v	：要素の変位関数
l	：時刻 t の部材長
l_0	：時刻 0 の部材長

ここで，要素の変形量は，すべて時刻 0 の要素形状を基準として表現される。また，時刻 $t+\Delta t$ の変形はすべて，時刻 t からの増分として定義される。時刻 t 及び時刻 $t+\Delta t$ の要素内の変位場及び変位関数を次のように定める。

変位場
$$U(x,y) = u(x) - y\frac{dv(x)}{dx}, \quad V(x,y) = v(x) \tag{1}$$

変位関数
$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3, \quad v(x) = \alpha_5 + \alpha_6 x \tag{2}$$

ある要素内において，仮想仕事の原理から出発して剛性方程式をたて，それを一般の有限要素法の手法に従って構造全体について組み立てると，次の式が得られる。

$$[K]\{u\} = \{F\} - \{R\} \tag{3}$$

ここに，$\{u\}$ は変位増分を簡略化した表わし方で，$[K]$ は有限変形剛性マトリックス，$\{F\}$ は外力ベクトル，$\{R\}$ は内部抵抗力ベクトルである。増分形の運動方程式は，式(3)に慣性項を付け加えて次式で与えられる。

$$[M]\{{}^{t+\Delta t}\ddot{u}\} + [{}^tK]\{u\} = \{{}^{t+\Delta t}F\} - \{{}^{t+\Delta t}R\} \tag{4}$$

式(4)が，有限変形を考慮した増分形式の運動方程式である。さらに，弾塑性応答においては，剛性マトリックス $[{}^tK]$ に塑性の影響が加わる。すなわち，構造材料を完全弾塑性体とすれば，断面の降伏した部分の剛性はゼロとなる。しかし，除荷は弾性的に起きるものとする。

さて，以上で得られた，弾塑性挙動を同時に考える，有限変形を考慮した増分形式の運動方程式［式(4)］を解くことを考える。本研究では，式(4)を Newmark の β 法を用いて数値積分している。Newmark の β 法の一般公式は，時刻 $t+\Delta t$ の変位及び速度について次式で与えられる。

$$\{^{t+\Delta t}u\} = \{^{t}u\} + \Delta t\{^{t}\dot{u}\} + \Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{^{t}\ddot{u}\} + \beta\{^{t+\Delta t}\ddot{u}\}\right]$$
$$\{^{t+\Delta t}\dot{u}\} = \{^{t}\dot{u}\} + \frac{1}{2}\Delta t\left(\{^{t}\ddot{u}\} + \{^{t+\Delta t}\ddot{u}\}\right) \qquad (5)$$

本研究では、$\beta = 1/4$ として平均加速度法を用いている。$\beta = 1/4$ とおいて式(5)の第一式を $\{^{t+\Delta t}\ddot{u}\}$ について解いて、変位増分 $\{u\} = \{^{t+\Delta t}u\} - \{^{t}u\}$ を導入すると次式が得られる。

$$\{^{t+\Delta t}\ddot{u}\} = \frac{4}{\Delta t^2}\{u\} - \frac{4}{\Delta t}\{^{t}\dot{u}\} - \{^{t}\ddot{u}\} \qquad (6)$$

式(6)を、先に述べた式(4)に代入し、変位増分$\{u\}$について解くと

$$\left\{\frac{\Delta t^2}{4}[^{t}K] + [M]\right\}\{u\} = \frac{\Delta t^2}{4}\left[\{^{t+\Delta t}F\} - \{^{t+\Delta t}R\} + [M]\left(\frac{4}{\Delta t}\{^{t}\dot{u}\} + \{^{t}\ddot{u}\}\right)\right] \qquad (7)$$

ここで
$$[K^*] = \frac{\Delta t^2}{4}[^{t}K] + [M] \qquad (8)$$
$$[F^*] = \frac{\Delta t^2}{4}\left[\{^{t+\Delta t}F\} - \{^{t+\Delta t}R\} + [M]\left(\frac{4}{\Delta t}\{^{t}\dot{u}\} - \{^{t}\ddot{u}\}\right)\right] \qquad (9)$$

とおくと、式(7)は、次のようになる。

$$[K^*]\{u\} = \{F^*\} \qquad (10)$$

式(10)は、静的な非線形の支配方程式と全く同じ形となるので、各時刻について式(5)より速度と加速度を求めると、従来の接線剛性法の手法を使うことができる。

3 計算例

2ヒンジアーチの移動荷重による計算結果を示す。アーチの構造・断面諸元は スパン $l = 200m$、断面積 $A = 0.5m^2$、断面二次モーメント $I = 0.5m^4$。従って細長比は $l/r = 200$ である。アーチの死荷重は $w_d = 12.5\,t/m$ である。このアーチに荷重強度 $w = 5.0\,t/m$、全長400mの列車が 120 km/h で通過した時の、アーチの弾塑性挙動を

i) 弾性計算
ii) $\sigma_y = 1800\ kg/cm^2$
iii) $\sigma_y = 1200\ kg/cm^2$

とした場合について、応答変位ないし塑性域の広がりを記す。

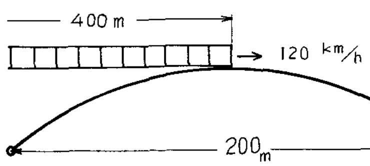


図-2　2ヒンジアーチと移動荷重

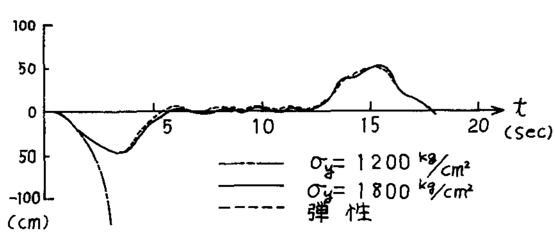


図-3　応答変位

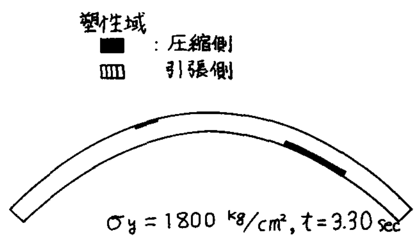


図-4a　塑性域の広がり

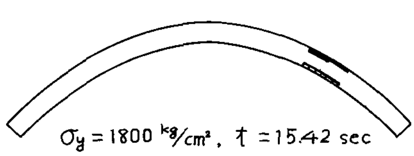


図-4b　塑性域の広がり

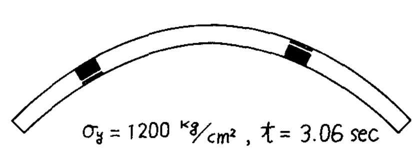


図-4c　塑性域の広がり