粘弾性層を有する梁の移動荷重による応答解析

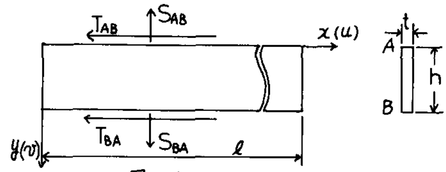
岩手大学工学部　正員　○岩崎正二
岩手大学工学部　正員　嵯峨耕咲
岩手大学工学部　　　　阿部信介

1．まえがき

本論文は上面に薄い粘弾性層を有する帯板が走行荷重を受けるときの動的応答解析について述べたものである。解析にあたっては帯板要素の軸方向変位が直線性を保つという仮定から誘導された動的な変位剪断方程式を用いる。又粘弾性層に生じる断面力は軸力のみを考慮し，応力－ひずみ関係にはVoigtモデルを採用する。粘弾性層と帯板の接合面でのつりあい等より動的基本式が連立微分方程式の形で得られるが，この解を求めるにあたっては帯板要素の接線変位，移動荷重をFourier級数に展開する方法をとり，完全解を強制振動解と固有振動解の和として求めた。

2．帯板の変位剪断方程式

図-1に示す細長い矩形帯板要素について，x，y方向変位u，vを深さ方向に線形分布と仮定し，慣性力を考慮した平面応力のつりあい式を解くと以下の公式が導かれる。



図－1

$$T_{AB}=\frac{hN}{6}(2u_A''+u_B'')+\frac{\nu N}{2}(v_B'-v_A')+\frac{Gt_1}{h}(u_B-u_A)+\frac{Gt_1}{2}(v_A'+v_B')-\frac{\rho t_1 h}{6}(2\ddot{u}_A+\ddot{u}_B) \qquad (1)$$

$$T_{BA}=\frac{hN}{6}(u_A''+2u_B'')+\frac{\nu N}{2}(v_B'-v_A')+\frac{Gt_1}{h}(u_A-u_B)-\frac{Gt_1}{2}(v_A'+v_B')-\frac{\rho t_1 h}{6}(\ddot{u}_A+2\ddot{u}_B) \qquad (2)$$

$$S_{AB}-S_{BA}=Gt_1(u_B'-u_A')+\frac{Gt_1h}{2}(v_A''+v_B'')-\frac{\rho t_1 h}{2}(\ddot{v}_A+\ddot{v}_B) \qquad (3)$$

ここで $N=\frac{Et}{1-\nu^2}$, $u'=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}$, E:ヤング係数　G:せん断弾性係数　ρ:単位体積質量　ν:ポアソン比

3．基本方程式

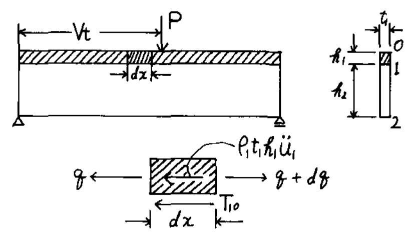
図-2より$v_1=v_2$，$\nu=0$の仮定のもとで各接線における剪断力，法線力のつりあいをとると

$$T_{10}+T_{12}=0,\quad T_{21}=0,\quad S_{12}-S_{21}-\rho_1 t_1 h_1 \ddot{v}_1=-P(x,t) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}-T_{10}+\rho_1 t_1 h_1 \ddot{u}_1=0 \qquad (5)$$

粘弾性層はVoigtモデルを仮定しているので

$$q=(E_1 t_1 h_1 u_1'+K t_1 h_1 \dot{u}_1') \qquad K\text{．粘性係数} \qquad (6)$$



図－2

(4)式に(1)，(2)，(3)，(5)，(6)式を代入するとu_1，u_2，v_1を未知変位とする3本の動的基本式が求まる。

$$\left(E_1t_1h_1+\frac{E_2t_1h_2}{3}\right)u_1''+Kt_1h_1\dot{u}_1''+\frac{E_2t_1h_2}{6}u_2''+\frac{E_2t_1}{2h_2}(u_2-u_1)+\frac{E_2t_1}{2}v_1'-\left(\rho_1t_1h_1+\frac{\rho_2t_1h_2}{3}\right)\ddot{u}_1-\frac{\rho_2t_1h_2}{6}\ddot{u}_2=0 \qquad (7)$$

$$\frac{E_2t_1h_2}{6}(u_1''+2u_2'')+\frac{E_2t_1}{2h_2}(u_1-u_2)-\frac{E_2t_1}{2}v_1'-\frac{\rho_2t_1h_2}{6}(\ddot{u}_1+2\ddot{u}_2)=0 \qquad (8)$$

$$\frac{E_2t_1}{2}(u_2'-u_1')+\frac{E_2t_1h_2}{2}v_1''-(\rho_1t_1h_1+\rho_2t_1h_2)\ddot{v}_1=-P(x,t) \qquad (9)$$

4．解式

荷重Pが一定速度Vで走行した場合の特解をつぎのようにおく。

$$\left.\begin{aligned}
u_{1s}&=\frac{2}{\ell}\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_1\sin\frac{m\pi}{\ell}Vt+C_1'\cos\frac{m\pi}{\ell}Vt\right)\cos\frac{m\pi}{\ell}x\\
u_{2s}&=\frac{2}{\ell}\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_2\sin\frac{m\pi}{\ell}Vt+C_2'\cos\frac{m\pi}{\ell}Vt\right)\cos\frac{m\pi}{\ell}x\\
v_{1s}&=\frac{2}{\ell}\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_3\sin\frac{m\pi}{\ell}Vt+C_3'\cos\frac{m\pi}{\ell}Vt\right)\sin\frac{m\pi}{\ell}x,\quad P(x,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{m=1}^{\infty}P\sin\frac{m\pi}{\ell}Vt\cdot\sin\frac{m\pi}{\ell}x
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

(10)式を(7)(8)(9)式に代入し整理すると，(11)式のような未定定数 $C_1 \cdots C_3'$ を定めるマトリックス方程式が求められる。この式を解いて得た $C_1 \cdots C_3'$ の値を (10) 式に代入すると，求める強制振動の解が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{15} & 0 \\ & K_{22} & 0 & K_{24} & 0 & K_{26} \\ & & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & 0 & K_{46} \\ & Sym. & & & K_{55} & 0 \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(m) \\ C_1'(m) \\ C_2(m) \\ C_2'(m) \\ C_3(m) \\ C_3'(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

ここで $K_{11} = -K_{22} = \left(E_1 t_1 h_1 + \frac{E_2 t_1 h_2}{3}\right) M^2 - \left(\rho_1 t_1 h_1 + \frac{\rho_2 t_1 h_2}{3}\right)\alpha^2 + \frac{E_2 t_1}{2h_2}$

$K_{12} = -K t_1 h_1 M^2 \alpha,\ K_{13} = -K_{24} = \frac{E_2 t_1 h_2}{6} M^2 - \frac{\rho_2 t_1 h_2}{6}\alpha^2 - \frac{E_2 t_1}{2h_2}$

$K_{15} = K_{46} = -K_{25} = -K_{35} = -\frac{E_2 t_1}{2} M,\ K_{33} = -K_{44} = \frac{E_2 t_1 h_2}{3} M^2 - \frac{\rho_2 t_1 h_2}{3}\alpha^2 + \frac{E_2 t_1}{2h_2}$

$K_{55} = -K_{66} = \frac{E_2 t_1 h_2}{2} M^2 - (\rho_1 t_1 h_1 + \rho_2 t_1 h_2)\alpha^2,\ M = \frac{m\pi}{\ell},\ \alpha = \frac{m\pi}{\ell} V,\ (m = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

固有振動については解をつぎのように仮定する。

$$u_{1n} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{S_m t} \cos\frac{m\pi}{\ell}x,\quad u_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{S_m t} \cos\frac{m\pi}{\ell}x,\quad v_{1n} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{S_m t} \sin\frac{m\pi}{\ell}x \qquad (12)$$

上式を $P(x, t) = 0$ の動的基本式に代入し A_m, B_m, C_m に関する係数行列式をゼロとおくと

$$H_1 S_m^6 + H_2 S_m^5 + H_3 S_m^4 + H_4 S_m^3 + H_5 S_m^2 + H_6 S_m + H_7 = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots\cdots) \qquad (13)$$

ここで $H_1 = (1 + 4\bar{\gamma})(1 + \bar{\gamma}),\ H_2 = 4M^2 \bar{\gamma} C_1^2 T_1 (1 + \bar{\gamma})$

$H_3 = 6\frac{C_2^2}{h_2^2}(1 + \bar{\gamma})^2 + M^2\left[4(1 + \bar{\gamma})\left\{(1 + \bar{\gamma})C_2^2 + \bar{\gamma} C_1^2\right\} - \frac{3}{2}C_2^2\right]$

$H_4 = 6M^2 \bar{\gamma} C_1^2 C_2^2 T_1 \left\{M^2\left(1 + \frac{2}{3}\bar{\gamma}\right) + \frac{1}{h_2^2}(1 + \bar{\gamma})\right\}$

$H_5 = 6M^2 C_2^2 \left[\frac{1}{h_2^2}(C_2^2 + \bar{\gamma} C_1^2)(1 + \bar{\gamma}) + M^2\left\{C_1^2 \bar{\gamma}\left(1 + \frac{2}{3}\bar{\gamma}\right) + \frac{C_2^2}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\bar{\gamma}\right)\right\}\right]$

$H_6 = 2M^6 \bar{\gamma} C_1^2 C_2^4 T_1,\quad H_7 = M^6 C_2^4 \left(\frac{C_2^2}{2} + 2\bar{\gamma} C_1^2\right)$

$C_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1},\ C_2^2 = \frac{E_2}{\rho_2},\ T_1 = \frac{K}{E_1},\ \bar{\gamma} = \frac{\rho_1 t_1 h_1}{\rho_2 t_1 h_2}.$

(13)式の6次方程式の根は一般に3組の共役な複素根で求まる。すなわち

$$S_{m1}, S_{m2} = -\beta_{m1} \pm i\gamma_{m1},\quad S_{m3}, S_{m4} = -\beta_{m2} \pm i\gamma_{m2},\quad S_{m5}, S_{m6} = -\beta_{m3} \pm i\gamma_{m3} \qquad (14)$$

$S_{mj} = -\beta_{mj} + i\gamma_{mj}$ に対応する A_{mj}, B_{mj} は，(14)式を A_m, B_m, C_m に関する同次方程式に代入することより

$$A_{mj} = (a_{mj} + i b_{mj}) C_{mj},\quad B_{mj} = (c_{mj} + i d_{mj}) C_{mj} \quad (j = 1, 2, 3) \qquad (15)$$

従って固有振動解は任意定数 E_{Rmj}, E_{Imj} $(j = 1, 2, 3)$ を用いて，次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} u_{1n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} e^{-\beta_{mj}t}\left[(a_{mj}E_{Rmj} + b_{mj}E_{Imj})\cos\gamma_{mj}t - (b_{mj}E_{Rmj} - a_{mj}E_{Imj})\sin\gamma_{mj}t\right]\cos\frac{m\pi}{\ell}x \\ u_{2n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} e^{-\beta_{mj}t}\left[(c_{mj}E_{Rmj} + d_{mj}E_{Imj})\cos\gamma_{mj}t - (d_{mj}E_{Rmj} - c_{mj}E_{Imj})\sin\gamma_{mj}t\right]\cos\frac{m\pi}{\ell}x \\ v_{1n} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} e^{-\beta_{mj}t}\left(E_{Rmj}\cos\gamma_{mj}t + E_{Imj}\sin\gamma_{mj}t\right)\sin\frac{m\pi}{\ell}x \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

完全解は，(10)式と(16)式より，$u_1 = u_{1n} + u_{1s},\ u_2 = u_{2n} + u_{2s},\ v_1 = v_{1n} + v_{1s}$ で与えられる。

又未定定数 E_{Rmj}, E_{Imj} $(j = 1, 2, 3)$ は，初期条件 $u_1 = u_2 = v_1 = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dot{v}_1 = 0$ より定めることができる。

5. 数値計算例

数値計算に用いた断面諸元は以下のとおりである。

$E_1 = 3.0 \times 10^4 t/m^2,\ E_2 = 2.1 \times 10^7 t/m^2$

$\rho_1 = 0.28\ t \cdot sec^2/m^2,\ \rho_2 = 0.80\ t \cdot sec^2/m^2$

$K = 1.0 \times 10^4 t\,sec/m^2,\ h_1 = 0.05m,\ h_2 = 2.00m$

$t_1 = 0.10m,\ \ell = 30m,\ P = 1t$

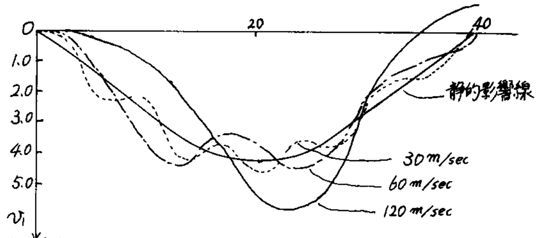


図-3　中央点における動的たわみ曲線

参考文献：　チモシェンコ著；　工業振動学

小坪清真著，　土木振動学