

# 和分変換による格子平板の曲げ振動解析

岩手大学工学部 学生員 ○細川 健次  
岩手大学工学部 正員 岩崎 正二

## 1. まえがき

本論文は格子平板に周期的な支点変位が与えられた場合の強制振動問題について論じたものである。その方法は桁要素について Consistent Mass を考え、格子点の力の釣合より時間を連続変数とし Flexibility を Discrete とする3連微分差分方程式を誘導しこれをフーリエ変換と逆変換を用いて解析したものである。

## 2. つりあい式

図のように  $m+1$ ,  $n+1$ 本の桁が等間隔  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ に剛結直交する格子平板を考える。 $x, y$ 格点の  $y$ 軸まわりの回転角を  $\theta_{xy}$ ,  $x$ 軸まわりの  $\theta'_{xy}$ , たわみを  $\delta_{xy}$  とすると慣性項を考慮したたわみ角公式は

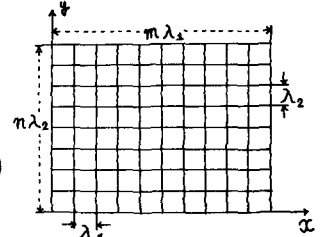


図-1 格子平板

$$M_{xx+1} = 2K_1 \{ 2\theta_{xy} + \theta_{x+1,y} - \frac{3}{\lambda_1} (\delta_{x+1,y} - \delta_{x,y}) \} + C_1 \lambda_1 \left( \frac{11}{270} \ddot{\delta}'_{x,y} + \frac{13}{420} \ddot{\delta}_{x+1,y} \right) + C_1 \lambda_1^2 \left( \frac{1}{105} \ddot{\theta}_{x,y} - \frac{1}{140} \ddot{\theta}_{x+1,y} \right) + C_1 \lambda_1 \frac{\ddot{\delta}}{12} \quad (1)$$

$$M_{xx-1} = 2K_1 \{ 2\theta_{xy} + \theta_{x-1,y} - \frac{3}{\lambda_1} (\delta_{x,y} - \delta_{x-1,y}) \} - C_1 \lambda_1 \left( \frac{13}{420} \ddot{\delta}'_{x,y} + \frac{11}{270} \ddot{\delta}_{x,y} \right) + C_1 \lambda_1^2 \left( \frac{1}{105} \ddot{\theta}_{x,y} - \frac{1}{140} \ddot{\theta}_{x-1,y} \right) - C_1 \lambda_1 \frac{\ddot{\delta}}{12} \quad (2)$$

$$T_{y,y+1} = B_2 (\theta_{xy} - \theta_{x,y+1}) + \frac{I_p I_{p2} A_2}{6} (2\ddot{\theta}_{xy} + \ddot{\theta}_{x,y+1}) \quad (3) \quad T_{y,y-1} = B_2 (\theta_{xy} - \theta_{x,y-1}) + \frac{I_p I_{p2} A_2}{6} (2\ddot{\theta}_{xy} + \ddot{\theta}_{x,y-1}) \quad (4)$$

$$S_{x,x+1} = K_1 \left\{ \frac{6}{\lambda_1} (\theta_{xy} + \theta_{x+1,y}) - \frac{12}{\lambda_1^2} (\delta_{x+1,y} - \delta_{x,y}) \right\} + C_1 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}'_{x,y} + 9\ddot{\delta}_{x+1,y}) + \frac{\lambda_1}{420} (22\ddot{\theta}_{xy} - 13\ddot{\theta}_{x+1,y}) + \frac{\ddot{\delta}}{2} \right\} \quad (5)$$

$$S_{x,x-1} = K_1 \left\{ -\frac{6}{\lambda_1} (\theta_{xy} + \theta_{x-1,y}) - \frac{12}{\lambda_1^2} (\delta_{x,y} - \delta_{x-1,y}) \right\} + C_1 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}'_{x,y} + 9\ddot{\delta}_{x-1,y}) + \frac{\lambda_1}{420} (-22\ddot{\theta}_{xy} + 13\ddot{\theta}_{x-1,y}) + \frac{\ddot{\delta}}{2} \right\} \quad (6)$$

$$S_{y,y+1} = K_2 \left\{ \frac{6}{\lambda_2} (\theta'_{xy} + \theta'_{x,y+1}) - \frac{12}{\lambda_2^2} (\delta_{x,y+1} - \delta_{x,y}) \right\} + C_2 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}'_{xy} + 9\ddot{\delta}_{x,y+1}) + \frac{\lambda_2}{420} (22\ddot{\theta}'_{xy} - 13\ddot{\theta}'_{x,y+1}) + \frac{\ddot{\delta}}{2} \right\} \quad (7)$$

$$S_{y,y-1} = K_2 \left\{ -\frac{6}{\lambda_2} (\theta'_{xy} - \theta'_{x,y-1}) - \frac{12}{\lambda_2^2} (\delta_{x,y} - \delta_{x,y-1}) \right\} + C_2 \left\{ \frac{1}{70} (26\ddot{\delta}'_{xy} + 9\ddot{\delta}_{x,y-1}) + \frac{\lambda_2}{420} (-22\ddot{\theta}'_{xy} + 13\ddot{\theta}'_{x,y-1}) + \frac{\ddot{\delta}}{2} \right\} \quad (8)$$

ここで  $K_1 = \frac{EI_x}{\lambda_1}$ ,  $K_2 = \frac{EI_y}{\lambda_2}$ ,  $B_1 = \frac{GI_x}{\lambda_1}$ ,  $B_2 = \frac{GI_y}{\lambda_2}$ ,  $C_1 = \rho_1 A_1 \lambda_1$ ,  $C_2 = \rho_2 A_2 \lambda_2$ ,  $\ddot{\delta}$ : 交点の地震変位  $\ddot{\delta} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ ,  $EI$ : 曲げ剛性,  $GI$ : 捩り剛性,  $\rho$ : 単位体積質量,  $A$ : 断面積,  $I_p$ : 断面2次極モーメント。

図-2 より格子の任意格点  $(x, y)$  点の  $x$  軸,  $y$  軸まわり

のモーメントの釣合, せん断力の釣合をとると

$$M_{xx+1} + M_{xx-1} + T_{y,y+1} + T_{y,y-1} = 0 \quad (9)$$

$$M_{y,y+1} + M_{y,y-1} + T_{x,x+1} + T_{x,x-1} = 0 \quad (10)$$

$$S_{x,x+1} + S_{x,x-1} + S_{y,y+1} + S_{y,y-1} = 0 \quad (11)$$

(9), (10), (11)式に(1)~(8)式を代入し整理すると

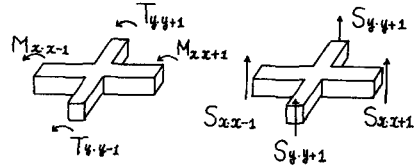


図-2  $(x, y)$ 点の力のつりあい

$$2K_1 \{ \Delta_x^2 \theta_{x-1,y} + 6\theta_{xy} - \frac{3}{\lambda_1} \Delta_x \delta_{x-1,y} \} - B_2 \Delta_y^2 \theta_{x,y-1} + C_1 \left\{ \frac{13\lambda_1}{420} \Delta_x \ddot{\delta}'_{x-1,y} - \frac{\lambda_1^2}{420} (3\Delta_x^2 \ddot{\theta}_{x-1,y} - 2\ddot{\theta}_{xy}) \right\} + C_2 \frac{I_{p2}^2}{6} (\Delta_y^2 \ddot{\theta}'_{x,y-1} + 6\ddot{\theta}'_{xy}) = 0 \quad (12)$$

$$2K_2 \{ \Delta_y^2 \theta'_{x,y-1} + 6\theta'_{xy} - \frac{3}{\lambda_2} \Delta_y \delta_{x,y-1} \} - B_1 \Delta_x^2 \theta'_{x-1,y} + C_2 \left\{ \frac{13\lambda_2}{420} \Delta_y \ddot{\delta}'_{x,y-1} - \frac{\lambda_2^2}{420} (3\Delta_y^2 \theta'_{x,y-1} - 2\ddot{\theta}'_{xy}) \right\} + C_1 \frac{I_{p1}^2}{6} (\Delta_x^2 \ddot{\theta}'_{x-1,y} + 6\ddot{\theta}'_{xy}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{6K_1}{\lambda_1} \{ \Delta_x \theta_{x-1,y} - \frac{2}{\lambda_1} \Delta_x^2 \delta_{x-1,y} \} + \frac{6K_2}{\lambda_2} \{ \Delta_y \theta'_{x,y-1} - \frac{2}{\lambda_2} \Delta_y^2 \delta_{x,y-1} \} + C_1 \left\{ \frac{1}{70} (9\Delta_x^2 \ddot{\delta}'_{x-1,y} + 70\ddot{\delta}_{xy}) - \frac{13\lambda_1}{420} \Delta_x \ddot{\theta}_{x-1,y} + \ddot{\delta} \right\} + C_2 \left\{ \frac{1}{70} (9\Delta_y^2 \ddot{\delta}'_{x,y-1} + 70\ddot{\delta}_{xy}) - \frac{13\lambda_2}{420} \Delta_y \ddot{\theta}'_{x,y-1} + \ddot{\delta} \right\} \quad (14)$$

ここで  $\Delta_x^2 \theta_{x-1,y} = \theta_{x+1,y} - 2\theta_{xy} + \theta_{x-1,y}$ ,  $\Delta_x \delta_{x-1,y} = \delta_{x+1,y} - \delta_{x-1,y}$ ,  $\Delta_y^2 \theta'_{x,y-1} = \theta'_{x,y+1} - 2\theta'_{xy} + \theta'_{x,y-1}$ ,  $\Delta_y \delta_{x,y-1} = \delta_{x,y+1} - \delta_{x,y-1}$ ,  $r_{s1} = \frac{I_{p1}}{A_1}$ ,  $r_{s2} = \frac{I_{p2}}{A_2}$ .

### 3 解式

(12), (13), (14) 式にそれぞれ  $C_i S_r$ ,  $S_i C_r$ ,  $S_i S_r$  変換を作用させ, 4 辺ヒンジの境界条件を代入し整理すると

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{Sym.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i S_r [\theta_{xy}] \\ S_i R_r [\theta'_{xy}] \\ S_i S_r [\delta_{xy}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ & M_{22} & M_{23} \\ \text{Sym.} & & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i S_r [\ddot{\theta}_{xy}] \\ S_i R_r [\ddot{\theta}'_{xy}] \\ S_i S_r [\ddot{\delta}_{xy}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで  $R_i S_r [\theta_{xy}] = \frac{(-1)^i}{2} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{xy} \sin \frac{r\pi}{n} y + \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{0y} \sin \frac{r\pi}{n} y + \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} \theta_{xy} \cos \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y$   
 $S_i R_r [\theta'_{xy}] = \frac{(-1)^r}{2} \sum_{x=1}^{m-1} \theta'_{xn} \sin \frac{i\pi}{m} x + \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{m-1} \theta'_{x0} \sin \frac{i\pi}{m} x + \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} \theta'_{xy} \sin \frac{i\pi}{m} x \cos \frac{r\pi}{n} y$   
 $S_i S_r [\delta_{xy}] = \sum_{x=1}^{m-1} \sum_{y=1}^{n-1} \delta_{xy} \sin \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y$   
 $K_{11} = 2K_1(6-D_i) + B_2 D_r$ ,  $K_{12} = 0$ ,  $K_{13} = -\frac{12K_1}{\lambda_1} \sin \frac{i\pi}{m}$ ,  $K_{22} = 2K_2(6-D_r) + B_1 D_i$   
 $K_{23} = -\frac{12K_2}{\lambda_2} \sin \frac{r\pi}{n}$ ,  $K_{33} = \frac{12K_1}{\lambda_1^2} D_i + \frac{12K_2}{\lambda_2^2} D_r$   
 $M_{11} = \frac{C_2 \lambda_1^2}{420} (2+3D_i) + \frac{C_1}{6} r_{s2}^2 (6-D_r)$ ,  $M_{12} = 0$ ,  $M_{13} = \frac{13C_1}{270} \lambda_1 \sin \frac{i\pi}{m}$   
 $M_{22} = \frac{C_2 \lambda_2^2}{420} (2+3D_r) + \frac{C_1}{6} r_{s1}^2 (6-D_i)$ ,  $M_{23} = \frac{13C_2}{370} \lambda_2 \sin \frac{r\pi}{n}$ ,  $M_{33} = C_1(1-\frac{9}{70}D_i) + C_2(1-\frac{9}{70}D_r)$   
 $F_1 = -\frac{C_1 \lambda_1}{12} \{1 - (-1)^i\} S_r [\ddot{\delta}]$ ,  $F_2 = -\frac{C_2 \lambda_2}{12} \{1 - (-1)^r\} S_i [\ddot{\delta}]$ ,  $F_3 = -(C_1 + C_2) S_i S_r [\ddot{\delta}]$   
 $D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{m})$ ,  $D_r = 2(1 - \cos \frac{r\pi}{n})$ ,  $\delta = a_0 \sin \omega t$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $r=1, 2, \dots, n$ .

和分変換を作用させた後の変位ベクトル, 外力ベクトル, 剛性マトリックス, 質量マトリックスをそれぞれ  $\{u\}$ ,  $\{F\}$ ,  $[K]$ ,  $[M]$  で表わすと (15) 式は

$$[K]\{u\} + [M]\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u\} = \{F\}. \quad (16)$$

定常振動解は, 外力が  $\{F\} = \{F\} \sin \omega t$  で与えられる場合,  $\{u_s\} = \{\bar{u}_s\} \sin \omega t$  とおいて (16) 式に代入すると

$$\{\bar{u}_s\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{F\}. \quad (17)$$

又振動数方程式は  $\{F\} = 0$ ,  $\{u_s\} = \{\bar{u}_s\} \sin(\omega t + \alpha)$  とおいて (16) 式に代入すると  $|[K] - \omega^2 [M]| = 0$  (18)

(18) 式を解いて固有値, 固有ベクトルを求める。固有ベクトルからなるモードマトリックスを  $[V]$  とおき各固有値に対する未定定数を  $\{\psi\}$  とすると固有振動解の変位の係関数は  $\{u_s\} = [V]\{\psi \sin(\omega t + \alpha)\}$  (19)

重ね合せの解は  $\{u\} = \{\bar{u}_s\} \sin \omega t + [V]\{\psi \sin(\omega t + \alpha)\}$  (20)

初期条件  $t=0$  で  $\{u\} = \{\dot{u}\} = 0$  より  $\{\psi\}$ ,  $\alpha$  を求め, (20) 式に代入し整理すると

$$\{u\} = \{\bar{u}_s\} \sin \omega t - \omega [V] \left[ \frac{\sin \omega t}{\omega} \right] [V]^{-1} \{\bar{u}_s\} \quad (21)$$

最終的に上式を逆変換することより, 求める解  $\{\delta\}$  は下式のように表わされる。

$$\{\delta(x, y, t)\} = \frac{4}{mn} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=1}^{n-1} \{u(i, r, t)\} [I] \begin{Bmatrix} \cos \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \\ \sin \frac{i\pi}{m} x \cos \frac{r\pi}{n} y \\ \sin \frac{i\pi}{m} x \sin \frac{r\pi}{n} y \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ここで  $[I]$  は単位行列,  $\{\delta\}^T = \{\theta_{xy}, \theta'_{xy}, \delta_{xy}\}$

### 4. 数値計算例

計算に用いた数値は以下のとおりである。

$$m = n = 8, \lambda_1 = \lambda_2 = 2m, \beta_1 = \beta_2 = 0.8 t \cdot \text{sec}^2 / m^4$$

$$E = 2.1 \times 10^7 t / m^2, I_x = I_y = 0.41667 \times 10^{-5} (m^4)$$

$$J = 2.8625 \times 10^{-6} (m^4), A_1 = A_2 = 0.005 m^2, a_0 = 0.01 m$$

参考文献; Nomachi; On a Stress Analysis of Grid Plate by Finite Transforms Concerning Finite Integration.

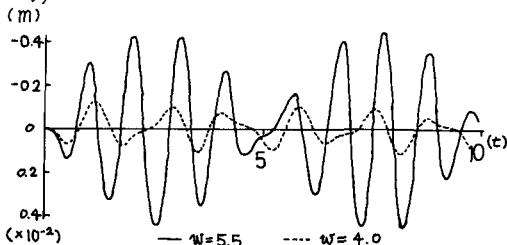


図-3 格子中央点の相対たわみ応答曲線