薄肉断面部材における弾性波の波動特性

秋田大学　○学生員　唐沢　洋司
秋田大学　　正　員　稼農　知徳
秋田大学　　正　員　薄木　征三

**1**、まえがき　古典曲げ理論に回転慣性とせん断変形を考慮したTimoshenko梁は、曲げ波動の挙動を示すものとして知られている。ねじり波動については、AggarwalとCranch　が、同じ考え方を適用し、薄肉開断面梁について展開した。これらは各々、古典曲げ理論あるいは従来の曲げねじり理論では、短波長において弾性波は無限の位相速度で伝幡するという欠点を改良すべく波動理論を展開したものである。本論文も基本的には同じ考え方をするのであるが、せん断ひずみ分布に平均せん断ひずみを仮定せず、せん断による変形を考慮した非線形せん断ひずみ分布を有するせん断変形を考慮した梁理論 を動的 な場合に拡張したものである。いづれの理論も断面不変の仮定を出発点とし、あくまでも梁理論の立場を保持した理論である。ここでは、自由度が各々連成する断面についても、簡単に数値計算できるという本論文の特長の1つを用いて、特にAggarwalとCranch　の理論と比較しつつ、チャンネル断面部材についてその動的挙動を考察する。

2．　理論の概要　せん断変形を考慮した薄肉断面部材の理論から式（1）の変位場が求められる。

$$\bar{U}=U-y\cdot\varphi,\ \bar{V}=V-x\cdot\varphi,\ \bar{W}=x\cdot U'-y\cdot V'-\omega\cdot\varphi'+\frac{E}{G}(B_x\cdot\mho+B_y\nabla+B_\omega\cdot\Phi) \qquad (1)$$

従って　ひずみ成分は式（2）となる。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_z&=w'-x\cdot u''-y\cdot v''-\omega\cdot\varphi''+\frac{E}{G}(B_x\mho'+B_y\nabla'+B_\omega\Phi')\\ \gamma_{sz}&=\Theta\cdot\varphi'+\frac{E}{G}(S_x\mho+S_y\nabla+S_\omega\Phi)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

微小変形に対する部材のひずみエネルギー $\pi_s$は、　$\pi_s=\frac{1}{2}\int_v(\sigma_z\cdot\varepsilon_z+\tau_{sz}\cdot\gamma_{sz})\,dv$　(3)

部材の運動エネルギー $\pi_k$は、　$\pi_k=\frac{1}{2}\int_v\rho\cdot\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\bar{U}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\bar{V}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{W}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\bar{W}}{\partial t}\right)dv$　(4)

外力のポテンシャルエネルギー $\pi_{ex}$は、　$\pi_{ex}=\int_{z_1}^{z_2}\int_F\{p_{xd}\bar{U}+p_{yd}\bar{V}+p_{zd}\bar{W}\}\,dF\,dz+\left[\int_F(\bar{\sigma}_z\bar{W}+\bar{\tau}_{sz}\xi)\,dF\right]_{z_1}^{z_2}$

ここで $\xi=l u+m\cdot v+r_s\varphi$　(5)

薄肉断面部材の運動方程式はHamiltonの原理から次のように与えられる。

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\pi_s-\pi_k+\pi_{ex})\,dt=0 \qquad (6)$$

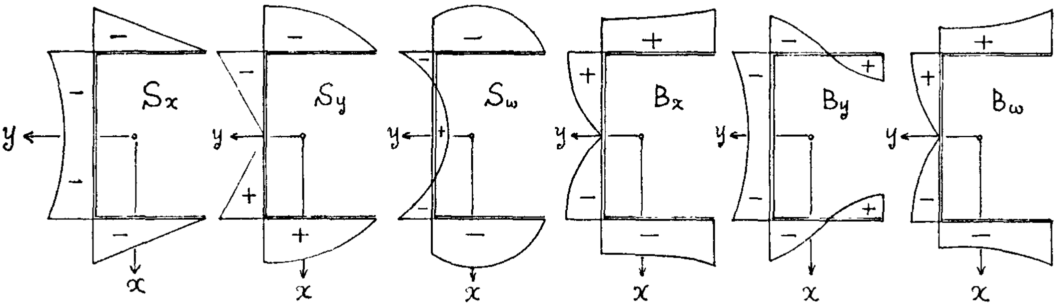
式（6）に式（1）、（2）などを代入して変分法により、$t_1$と$t_2$において仮想変位（変分）が零となるように定めると、その結果 Euler－ lagrangeの式及び部材両端の境界条件がそれぞれ誘導される。さらに、外荷重を受けない無限長の一様な断面部材を考える。位相速度C・波長λとしてZ方向の進行波を表わす式（7）を得られたEuler－ Lagrangeの式に代入すると　各変位成分の振幅に関する連立方程式が得られる。

$$u=\hat{u}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\cdot t)\quad v=\hat{v}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\,t)\quad w=\hat{w}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\cdot t)$$

$$\varphi=\hat{\varphi}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\cdot t)\quad \mho=\hat{\mho}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\cdot t)\quad \nabla=\hat{\nabla}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\cdot t)$$

$$\Phi=\hat{\Phi}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-c\cdot t)$$　ここで ^ は振巾を示す。　(7)

式（1）、（2）等に現われる $S_x$, $S_y$, $S_\omega$ · $B_x$, $B_y$, $B_\omega$ は、新しい座標であると考えることができ
これを示すと次のようになる。




自由振動弾性波の位相速度分散曲線は、先の連立方程式より得られる。これをマトリックス表示すると
（8）式になる。

$$\left\{[\mathbb{A}] - \left(\frac{c}{c_s}\right)[\mathbb{B}]\right\}\{\delta\} = 0 \tag{8}$$

ここで $\{\delta\} = \{\hat{w}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{\varphi}, \widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{\Phi}\}$

$[\mathbb{A}]$ マトリックスは、

$$\begin{bmatrix}
a^2F & -a^3Z_y & -a^3Z_x & -a^3Z_\omega & p^2a^2K_{fy} & p^2a^2K_{fx} & p^2a^2K_{f\omega} \\
 & a^2F+a^4J_y & a^4J_{xy} & -a^2Z_x+a^4C_y & -p^2a^3K_{yy} & -p^2a^3K_{xy} & p^2a^3K_{y\omega} \\
 & & a^2F+a^4J_x & a^2Z_y+a^4C_x & -p^2a^3K_{xy} & -p^2a^3K_{xx} & -p^2a^3K_{x\omega} \\
 & & & a^2J_k+a^4J_\omega & -p^2a^3K_{y\omega} & -p^2a^3K_{x\omega} & -p^2a^3K_{\omega\omega} \\
 & & & & p^4a^2R_{yy} & p^4a^2R_{xy} & p^4a^2R_{y\omega} \\
 & & & & & p^4a^2R_{xx} & p^4a^2R_{x\omega} \\
 & \text{Symm.} & & & & & p^4a^2R_{\omega\omega}
\end{bmatrix}$$

$[\mathbb{B}]$ マトリックスは、

$$\begin{bmatrix}
p^2a^2F & -p^2a^3Z_y & -p^2a^3Z_x & -p^2a^3Z_\omega & -p^4a^2K_{fy} & p^4a^2K_{fx} & p^4a^2K_{f\omega} \\
 & p^2a^2J_y & p^2a^4J_{xy} & p^2a^4C_y & -p^4a^3K_{yy} & -p^4a^3K_{xy} & -p^4a^3K_{y\omega} \\
 & & p^2a^4J_x & p^2a^4C_x & -p^4a^3K_{xy} & -p^4a^3K_{xx} & -p^4a^3K_{x\omega} \\
 & & & p^2a^4J_\omega+a^2J_z & -p^4a^3K_{y\omega}+p^2aD_{sy} & -p^4a^3K_{x\omega}+p^2aD_{xx} & -p^4a^3K_{\omega\omega}+p^2aD_{s\omega} \\
 & & & & p^6a^2R_{yy}+p^4D_{yy} & p^6a^2R_{xy}+p^4D_{xy} & p^6a^2R_{y\omega}+p^4D_{y\omega} \\
 & & & & & p^6a^2R_{xx}+p^4D_{xx} & p^6a^2R_{x\omega}+p^4D_{x\omega} \\
 & \text{Symm.} & & & & & p^6a^2R_{\omega\omega}+p^4D_{\omega\omega}
\end{bmatrix}$$