

差分による斜索本数の多い斜張橋の解析

福島県庁
岩手大学工学部
同

正員 ○丸山征紀
正員 宮本 裕
学生員 吉田隆寿

1 解析の目的

従来 斜張橋は応力法と変形法で解析されてきた。しかしこれらのほかに別解として差分による解析があげられる。斜索本数が非常に多い場合に微分方程式による解法が期待されるが、ここではそのためのアプローチとして差分方程式による解法をとりあげる。尚 現在盛岡市において歩道橋としての斜張橋が建設中であり、この断面を参考にして数値計算を行なう。

2 解析の理論

従来の差分は微分において極限をとるところを有限値をとることにより、その近似を求めるものであるが、ここでは力入つりあいから求められた、改良された、より精度の高い 次の差分方程式を用いる。

$$\frac{1}{\lambda_i} M_{i+1} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_{i+1}} \right) M_i + \frac{1}{\lambda_{i+1}} M_{i-1} = -P_i \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{1}{\lambda_i} y_{i+1} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_{i+1}} \right) y_i + \frac{1}{\lambda_{i+1}} y_{i-1} = - \left\{ k_i M_{i+1} + 2(k_i + k_{i+1}) M_i + k_{i+1} M_{i-1} \right\} \quad \left(\text{ただし } k_i = \frac{\lambda_i}{6EI\ell_i} \right) \quad \text{--- ②}$$

図1について上記の差分方程式を立てて、行列表示する。

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) & \frac{1}{\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_2} & -\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right) & \frac{1}{\lambda_3} \\ & \frac{1}{\lambda_3} & -\left(\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \quad \text{--- ③}$$

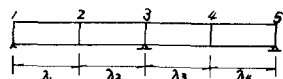


図-1

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) & \frac{1}{\lambda_2} \\ \frac{1}{\lambda_2} & -\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right) & \frac{1}{\lambda_3} \\ & \frac{1}{\lambda_3} & -\left(\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & 2(k_2 + k_3) & k_3 \\ k_3 & 2(k_3 + k_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} \quad \text{--- ④}$$

これを簡単に次のように書くことにする。

$$DM = -P \quad \text{--- ⑤}$$

$$D^T y = -KM \quad \text{--- ⑥}$$

式⑤⑥より

$$y = (DK^T D^T)^{-1} P \quad \text{--- ⑦}$$

$$M = -K^{-1} D^T (DK^T D^T)^{-1} P \quad \text{--- ⑧}$$

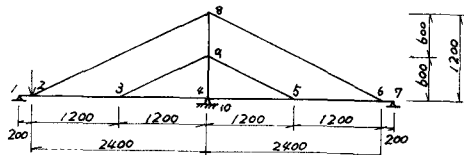


図-2

ところが斜張橋の解析においては、図2の節点2,3,5,6,のような斜索と桁との接合点の変位に斜索の軸力が影響するためこれをTとおくと式⑤は次のようになる。

$$DM - T = -P \quad \text{--- ⑨}$$

ここで、Sを斜索の軸力として、Δsを斜索の軸方向変位とすると、 $S = \frac{EA}{\ell} \Delta s$ である。斜索の軸方向変位の適合条件式などを使って結局 $T = by$ の関係式を得る。(たとえば $\frac{\partial}{\partial \ell} S = y_2 \sin \alpha + y_6 \cos \alpha$ なので、桁に斜索軸力が集中荷重 $T_i = S_i \sin \alpha = \frac{EA}{\ell} (y_2 \sin \alpha + y_6 \cos \alpha) \sin \alpha$ として作用する。つまり $T_i = b_{i1} y_2 + b_{i6} y_6$)

したがって式⑦⑧は次のようになる。

$$y = (DK^T D^T + b)^{-1} P \quad \text{--- ⑩}$$

$$M = -K^{-1} D^T (DK^T D^T + b)^{-1} P \quad \text{--- ⑪}$$

ここでマトリックス[b]を軸力マトリックスと呼ぶ。

斜索本数が $2n$ 本の場合、軸力マトリックス $[b]$ は $(3n+1)$ 行、 $(3n+1)$ 列のマトリックスとなり次のように $[b]$ の要素は対角線状に現われる。

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{nn} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n+2, n+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{3n+1, 3n+1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

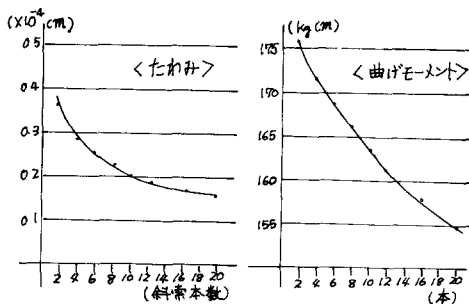


図-3-a 桁のたわみと曲げモーメント

3 解析結果とその比較

計算及び比較の都合上 図2のように斜索は平行に等間隔に張るものとし 左右対称な形式とする。比較の際には次のものについて行なう。ただし断面は次のように決める。
 桁: $A=230(\text{cm}^2)$, $I=3.38 \times 10^5(\text{cm}^4)$, $E=2.1 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$
 塔: $A=300(\text{cm}^2)$, $I=20 \times 10^5(\text{cm}^4)$, $E=2.1 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$
 斜索: $A=14.2(\text{cm}^2)$, $E=2.0 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$

- 最も外側の斜索と桁との接合点の1つ、つまり図2における節点2のたわみ及び曲げモーメント (図-3-a)
- 塔の先端のたわみ及び塔の下端の曲げモーメント (図-3-b)

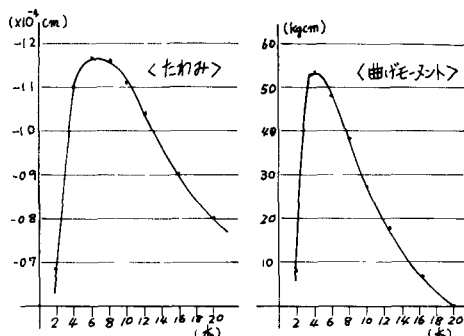


図-3-b 塔のたわみと曲げモーメント

それぞれについてグラフに表わすと図3のようになる。これから斜索本数の変化に伴うそれぞれの変化には一定の傾向が見られる。

4 他の方ととの比較

ここでは現在盛岡で建設中の橋を図4のような形式を用いて変形法と差分法の計算結果を比較する。ただし断面は次のようにする。桁: $A=259.5(\text{cm}^2)$, $I=9.765 \times 10^5(\text{cm}^4)$, $E=2.1 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$ 塔: $A=89.6(\text{cm}^2)$, $I=1.222 \times 10^4(\text{cm}^4)$, $E=2.1 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$ 斜索: $A=13.74(\text{cm}^2)$, $E=1.95 \times 10^6(\text{kg/cm}^2)$

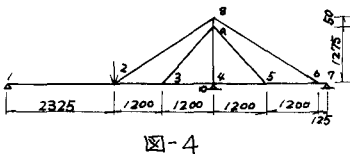


図-4

表-1

たわみ ($\times 10^3 \text{ cm}$)		曲げモーメント ($\times 10^3 \text{ kg-cm}$)	
変形法	差分法	変形法	差分法
2 0.3399	0.3212	2 0.5138	0.4924
3 0.1720	0.1600	3 -0.08442	-0.09871
5 -0.06991	-0.07046	4 -0.1411	-0.1082
6 -0.01069	-0.01090	5 -0.2239	-0.2335
8 -0.1147	-0.1058	6 -0.06658	-0.06876
9 -0.1151	-0.1065	9 0.01096	0.01061
		10 -0.01093	-0.01035

表-2

ここで用いた差分法は変形法と比較して 補剛桁と塔に働く軸力を考慮しないという理論上の相違がある。とくに節点2における荷重状態では補剛桁と塔に働く軸力が大きくこれが解析に影響し誤差となって表われたものと考えられる。(表-1)そこで軸力からの影響を減少させるために補剛桁と塔の断面積をそれぞれ 10^4 倍して変形法により解析した値は表-2のように差分法と一致する。

たわみ ($\times 10^3 \text{ cm}$)		曲げモーメント ($\times 10^3 \text{ kg-cm}$)	
変形法	差分法	変形法	差分法
2 0.321211	0.321209	2 0.4924	0.4924
3 0.159984	0.159983	3 -0.09871	-0.09871
5 -0.0704605	-0.0704606	4 -0.1082	-0.1082
6 -0.0109019	-0.0109019	5 -0.2335	-0.2335
8 -0.105846	-0.105845	6 -0.06876	-0.06875
9 -0.106516	-0.106515	9 0.01061	0.01061
		10 -0.01035	-0.01035

尚、計算は本学土木工学科の電子計算機OKITAC-4300C-を使用した。本研究の共同研究者は高橋和彦である。

参考文献 1) 大地羊三: 電子計算機による構造解析, 橋梁学会

2) 宮本 裕: 差分方程式による斜張橋の並列解析法, 岩手大学工学部研究報告第25巻