

途中にヒンジを有する弾性床と棒の座屈解析

岩手大学工学部 正員 宮本 裕

1. まえがき

著者はこれまでに弾性床と棒の座屈解析をするのに、数値計算に適した座屈の剛性マトリックスを誘導し、一般固有値問題のライブラリーを利用して計算してきた。これまでの方法では連続支点条件や変断面を有する棒の場合には非常に有効であった。しかし棒要素の途中にヒンジのある場合には適用できなかった。本報告はこの場合にも適用できるように拡張された理論である。工学的応用例としては、塑性ヒンジの発生した弾性床と棒の座屈固有値の計算など考えよう。

2. 解析の理論

弾性床と棒の座屈の剛性マトリックスはつぎのようになる。²⁾

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = EI \begin{Bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} \\ -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} & \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} \\ \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} - N \begin{Bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

図-1 型式0

これに対して図-2 のように左端がヒンジの場合 $M_i = 0$ となり、式(1)より $M_i = K_{21} v_i + K_{22} \theta_i + K_{23} v_j + K_{24} \theta_j = 0$ となるから、これから $\theta_i = -K_{22}^{-1} (K_{21} v_i + K_{23} v_j + K_{24} \theta_j)$ となる。これを改めて式(1)に代入すると結局つぎの剛性マトリックスを得る。

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = EI \begin{Bmatrix} \frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^3} \\ -\frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^3} \\ \frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} \frac{l}{12} & -\frac{l}{24} & -\frac{l^2}{120} \\ -\frac{l}{24} & \frac{13l}{48} & \frac{7l^2}{240} \\ -\frac{l}{120} & \frac{7l^2}{240} & \frac{l^3}{240} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} - N \begin{Bmatrix} \frac{9}{8l} & -\frac{9}{8l} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{9}{8l} & \frac{9}{8l} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{l}{8} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

図-2 型式1

同様にして右端ヒンジの場合の剛性マトリックスを得る。

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \end{Bmatrix} = EI \begin{Bmatrix} \frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^3} \\ \frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^3} \\ -\frac{3}{l^3} & -\frac{3}{l^3} & \frac{3}{l^3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} \frac{13l}{48} & -\frac{7l^2}{240} & -\frac{l}{24} \\ \frac{7l^2}{240} & \frac{l^3}{240} & \frac{l^2}{120} \\ -\frac{l}{24} & \frac{l^2}{120} & \frac{l}{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} - N \begin{Bmatrix} \frac{9}{8l} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8l} \\ -\frac{1}{8} & \frac{l}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{9}{8l} & \frac{1}{8} & \frac{9}{8l} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

図-3 型式2

式(1), (2), (3)の各式の右辺において、第1項は棒の曲げの剛性マトリックス、第2項はばねの剛性マトリックス、第3項は座屈荷重による剛性マトリックスを表す。特に $k=0$ として第2項を無視すると、棒の座屈の剛性マトリックスとなる。さらに第3項も無視すると、文献¹⁾に見られるヒンジ節点を持つ平面骨組構造の剛性マトリックスとなる。式(1), (2), (3)を適宜用いて個々の剛性マトリックスを重ね合せ、全体の剛性マトリックスを求める。つぎに支点条件を考慮して、結局つぎのようない一般固有値問題とする。

$$[K]\{\phi\} = N[A]\{\phi\} \quad \dots (4)$$

これを解く方法はいくつかあるが、普通にはコレスキー分解を用いて $[A] = [L][L]^T$ とし、また $\{\phi\} = [L]^T \{\psi\}$ とおくと式(4)はつぎのようになる。

$$[K][L]^T\{\psi\} = N[LL][L]^T\{\psi\} = N[LL]\{\psi\}.$$

この式の両辺に左から $[L]^T$ をかけて

$$[L]^T[K][L]^T\{\psi\} = N[L]^T[LL]\{\psi\} = N\{\psi\}.$$

とし $[M] = [L]^T[K][L]^T$ とおくと式(4) はつぎのような標準固有値問題に変換される。

$$[M]\{\psi\} = N\{\psi\} \quad \dots (5)$$

一般固有値問題のライブラリーは全日本大型計算機センターにあるが、最近高性能プログラムが開発された。

3. 数値計算例

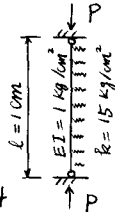
例 1. 両端ヒンジの弾性床土棒

電子計算結果 8.435 kg

理論値 $P = 2\sqrt{k \cdot EI}$

$$= 7.745 \text{ kg}$$

図-4



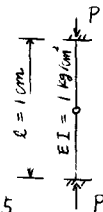
例 2. 中央部にヒンジのある棒

電子計算結果 8.297 kg

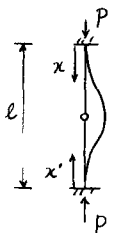
理論値 $P = \frac{\pi^2}{L^2} EI$

$$= 9.870 \text{ kg}$$

図-5



なお例 2 については以下のようにして理論値を求めた。



$$0 < x < \frac{l}{2} \text{ におけるたわみの微分方程式は } EI W_1'''' + P W_1'' = 0 \quad \dots (6)$$

$$\text{この解は } W_1 = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + C_3 \frac{x}{l} + C_4, \text{ ただし } k = \sqrt{P/EI} \quad \dots (7)$$

$$\text{同様に } 0 < x' < \frac{l}{2} \text{ におけるたわみは } W_2 = C_5 \cos(kx') + C_6 \sin(kx') + C_7 \frac{x'}{l} + C_8. \quad \dots (8)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} W_1' &= -C_1 k \sin(kx) + C_2 k \cos(kx) + C_3 \frac{1}{l}, \\ W_1'' &= -C_1 k^2 \cos(kx) - C_2 k^2 \sin(kx), \\ W_1''' &= C_1 k^3 \sin(kx) - C_2 k^3 \cos(kx). \end{aligned} \right\} \quad \dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} W_2' &= -C_5 k \sin(kx') + C_6 k \cos(kx') + C_7 \frac{1}{l}, \\ W_2'' &= -C_5 k^2 \cos(kx') - C_6 k^2 \sin(kx'), \\ W_2''' &= C_5 k^3 \sin(kx') - C_6 k^3 \cos(kx'). \end{aligned} \right\} \quad \dots (10)$$

以上の式において未定係数は $C_1 \sim C_8$ の計 8 個であるから、境界条件としては $x=0$ で $W_1=0 \quad \dots (11)$

$$x=0 \text{ で } W_1'=0 \quad \dots (12), \quad x'=0 \text{ で } W_2=0 \quad \dots (13), \quad x'=0 \text{ で } W_2'=0 \quad \dots (14)$$

$$x=\frac{l}{2} \text{ かつ } x'=\frac{l}{2} \text{ で } W_1=W_2 \quad \dots (15), \quad x=\frac{l}{2} \text{ で } M=0 \therefore W_1''=0 \quad \dots (16), \quad x'=\frac{l}{2} \text{ で } M=0$$

$$\therefore W_2''=0 \quad \dots (17), \quad x=\frac{l}{2} \text{ かつ } x'=\frac{l}{2} \text{ で } Q=0 \therefore W_1''' + k^2 W_1' + W_2''' + k^2 W_2' = 0 \quad \dots (18)$$

が必要である。

式(11)から式

(18)までを整理

すると式(19)の

ようになる。

ただし

$$C = \cos \frac{1}{2} kl$$

$$S = \sin \frac{1}{2} kl$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kl & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kl & 1 & 0 \\ C & S & \frac{1}{2} & 1 & -C & -S & -\frac{1}{2} & -1 \\ C & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots (19)$$

式(19)の $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}^T$

の係数マトリックスを 0 とおくこと

により座屈固有値が得られる。

すなわち $P = \frac{\pi^2}{L^2} EI$ となる。

なお計算には北大、東北大、東大の

各大型計算機センターを利用した。

参考文献 1) ビューズ他 (成岡昌夫訳) : コンピュータによる骨組構造解析, 培風館 2) 安考, 渡辺, 宮本:

数値計算に適した弾性床土の棒の座屈の剛性マトリックス解析法について, 第 31 回講演概要集 3) 二宮市三:

固有値問題のソフトウェア, 日本鋼構造協会 有限要素法に関する講習会テキスト, 昭和 52 年 2 月