連続体的考察によるトラス構造解析の研究

東北大学 学 ○西村和夫
東北大学 正 佐武正雄

1 緒言

大規模トラス構造のマトリックス構造解析では，計算機の記憶容量および演算時間が一般に膨大なものとなる。そこで実用的な目的で簡便な，微分方程式によるパラメータ解析もしくは近似解法が必要となる。本論文ではこのような立場から１パネル（Fig 1）または複数パネルを構成要素として，トラス構造に対応する一般化された連続体（コセラ連続体）の構成方程式を誘導し，これを用いてトラス構造のFEM解析を行ない考察を行なう。

2 トラスパネルに対応した構成方程式の誘導

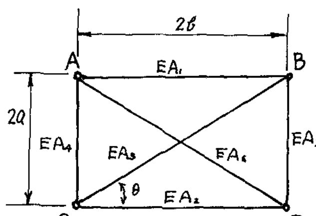


Fig 1 モデル1

Fig 1 に示すような単位要素をもつ規則的配列のトラス構造物の要素の変位場として次式を与える。

$$u_i = \alpha_{i0} + \alpha_{ij} x_j + (-1)^{i+1} \alpha_{i3} x_1 x_2 \quad (1)$$

ここで α_{im} $m=0,1,2,3$ は未定係数である。

この変位場は要素としての変形後の形状を決定するトラスとしての４本の弦材の変形状態をすべて表わし，また隣接要素間においても適合条件を満足する。

(1)式の変位場による要素の歪として次式を定義する。

$$e_{11} = \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{x_2=0} = \alpha_{11}, \quad e_{22} = \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{x_1=0} = \alpha_{22}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{x_1 x_2=0} = \frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21})$$

$$k_{31} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\alpha_{13}, \quad k_{32} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\alpha_{32}$$

単位体積当りの歪エネルギー密度を $\Phi(e_{ij}, k_{3i})$ とすれば，

$$\delta\Phi = \sigma^{ij}\delta e_{ij} + \mu^{3i}\delta k_{3i} \qquad \sigma^{ij} = \sigma^{ji} \quad (2)$$

従ってトラス１単位要素の応力として(2)の σ^{ij}, μ^{3i} を導入すればトラスパネルに対応した構成方程式は次のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \\ \mu^{31} \\ \mu^{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{1111} & 2D^{1112} & D^{1122} & D^{1131} & 0 \\ D^{1211} & 2D^{1212} & D^{1222} & 0 & 0 \\ D^{2211} & 2D^{2212} & D^{2222} & 0 & D^{2232} \\ D^{3111} & 0 & 0 & D^{3131} & 0 \\ 0 & 0 & D^{3222} & 0 & D^{3232} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ k_{31} \\ k_{32} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで

$$D^{1111} = \frac{1}{2}(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) + (\bar{D}_5 + \bar{D}_6)\cos^4\theta$$

$$D^{2222} = \frac{1}{2}(\bar{D}_2 + \bar{D}_4) + (\bar{D}_5 + \bar{D}_6)\sin^4\theta$$

$$D^{1212} = (\bar{D}_5 + \bar{D}_6)\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$D^{1112} = (\bar{D}_5 - \bar{D}_6)\cos^3\theta\sin\theta, \quad D^{1222} = (\bar{D}_5 - \bar{D}_6)\cos\theta\sin^3\theta$$

$$D^{3131} = 2b^2(\bar{D}_1 + \bar{D}_2), \quad D^{3232} = 2a^2(\bar{D}_3 + \bar{D}_4)$$

$$D^{1131} = b(-\bar{D}_1 + \bar{D}_2), \quad D^{2232} = a(-\bar{D}_3 + \bar{D}_4)$$

ここで $\bar{D}_i = \dfrac{A_i E_i}{h}$ (Fig 2)

3 解析法および結果

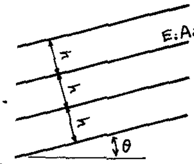
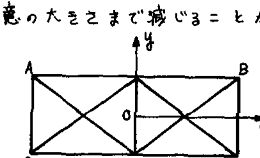


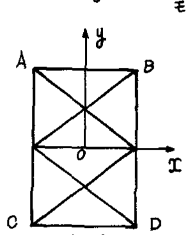
Fig2

(4)式の構成方程式を用いて，トラス１パネルの矩形有限要素により平面応力問題として解析することができる。さらに近似としてFig 3に示すモデル２，３のような２パネルをまとめて１要素とする解析，モデル４のような４パネルを１要素とする解析等，任意の複数パネルをまとめて１要素として解析することが可能である。この手法によりマトリックスの次数を任意の大きさまで減じることができ，演算時間

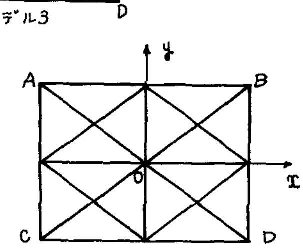


モデル3

Fig 3



モデル2



モデル4

を大幅に縮めることができる。

各要素の座標系をそれぞれFig 3のように与え、それぞれに(1)の変位場を与える。以下(4)を求めるのと同じ方法に従って各々の構成方程式を誘導し、これから剛性マトリックスを求める。質量マトリックスは(1)の変位場から直接部材に沿った線積分によって求めることができる。次にこれらの4モデルを用いてFig4に示す等断面を有する片持トラスの振動解析の計算結果について説明する。

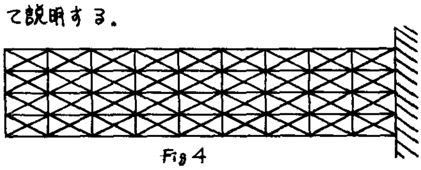


Fig 4

Fig. 5 は線積分 Consistent Mass Matrix (CM) による値
Fig. 6 は Lumped Mass Matrix (LM) による値である。

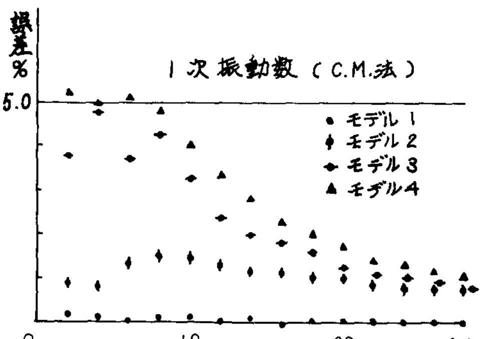


Fig 5

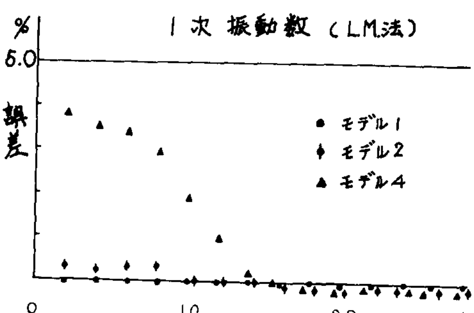


Fig 6

Fig.7にモデル4による1次から5次までの振動数の結果についての値である。

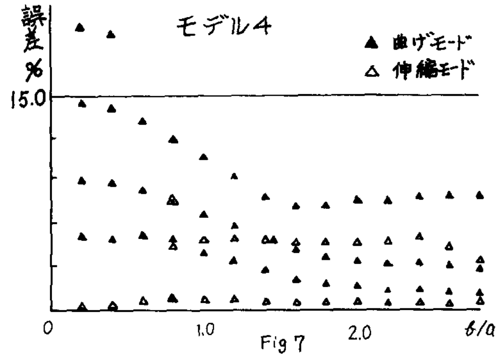


Fig 7

4 考察

以上の結果からも明らかなように、CM法による計算結果は1次の振動数で検討すれば、モデル4でも最大誤差が $b/a = 0.2$ の値で15%程度であり、構成要素の形状が正方形となる $b/a = 1.0$ においては10%、構造物全体で形状が正方形となる $b/a = 2.5$ では7%程度となる。またこの方法を用いることによって計算機の記憶容量は10分の1、演算時間は37分の1に減らすことができる。さらに剛性が高くなった分を Lumped Mass Matrix を用いて修正すれば Fig 6 に示すように結果は、モデル4でも $b/a = 0.2$ で誤差は5.0%以下であり、要素が正方形となる $b/a = 1.0$ では2%と、きわめて良い結果が得られた。

5 あとがき

大規模トラス構造物の解析について述べたが、通常のマトリックス構造解析では計算機の演算時間および記憶容量が一般に大きくなる点が問題であった。しかし本方法によれば、トラスの構成要素の内部構造（斜材の組み方）に対して、それぞれ構成方程式をあらかじめ求めておけば、任意の個数のパネルを組み合せることにより、所要の計算機の記憶容量もしくは演算時間で計算することが可能である。以上の点で本方法は有利であると考えられる。

6 参考文献

佐武正雄「偶応力を考慮したFEモデルについて」
52年土木学会東北支部技術研究発表会講演概要 1978.