

一様圧縮を受ける半無限弾性体中の扁平回転だ円空孔周辺の応力解析
 東北大学 学。平井弘義
 東北大学 正 佐武正雄

1 緒言

回転だ円空孔の応力集中に関しては無限体中にある場合が Edwards¹⁾ によって扱われ、最近、工田^{2),3)} は円柱および回転だ円体座標を用いて調和関数の変換を行ない、半無限体あるいは円柱中に存在する回転だ円空孔の解析を行っている。本研究では扁平回転だ円空孔が半無限体中に存在する場合の空孔周辺の応力を解析し、無限体中にある場合と比較を行ない、半無限体の表面から空孔への影響について考察を行なう。

2. 変位ポテンシャル

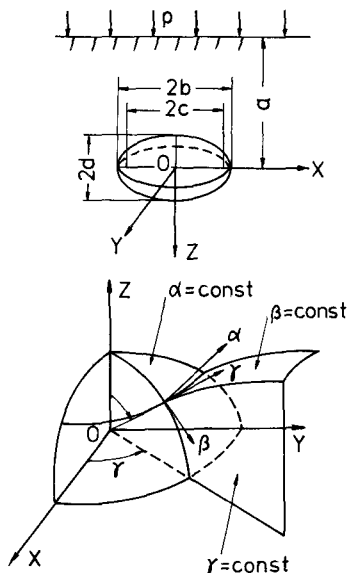


図1 一様圧縮を受ける半無限弾性体中の扁平回転だ円空孔と座標系

図1に示すように扁平回転だ円空孔を有する半無限弾性体の表面 $z = -a$ において一様圧縮 p を受ける場合を考える。O を座標原点とし、円柱座標 (r, θ, z) 、扁平回転だ円体座標 (α, β, γ) を用いれば、両座標間には次の関係がある。

$$r = c \bar{\xi} \bar{\eta}, \theta = \gamma, z = c \bar{\xi} \bar{\eta}. \quad (1)$$

ここに $2c$ は扁平回転だ円空孔の焦点距離、 $\bar{\xi} = \sinh \alpha$, $\bar{\eta} = \cosh \alpha$, $\bar{\eta} = \cosh \beta$, $\bar{\xi} = \sinh \beta$ である。次に変位ポテンシャルとして次のものを選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, 2Gu_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, 2Gu_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ 2Gu_x &= Z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, 2Gu_y = Z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, 2Gu_z = Z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - (3-4\nu)\Psi \end{aligned} \right\} (2)$$

ここに $\nabla^2 \Phi = 0$, $\nabla^2 \Psi = 0$ であり、特に扁平回転だ円体座標では次のようになる。

$$\nabla^2 = g^2 \bar{\xi}^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2g^2 \bar{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + g^2 \bar{\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2g^2 \bar{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}, \quad g^2 = 1/(c^2(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2))$$

式(2)において

$$\Phi = \frac{\nu p}{2(1+\nu)}(r^2 - z^2), \Psi = \frac{p}{2(1+\nu)}z \quad (3)$$

(ν : ポアソン比) とおけば式(2)は空孔のない半無限体の表面に一様圧縮 p を受ける場合の解となる。この場合次のような応力が空孔表面に生じている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}|_{\alpha=\alpha_0} &= -pc^2 g_0^2 \bar{\eta}^2 (\bar{\xi}^2 + 1), \\ \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=\alpha_0} &= pc^2 g_0^2 \bar{\xi} \bar{\eta} \bar{\xi} \bar{\eta}, \\ g_0^2 &= 1/(c^2(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2)). \end{aligned} \right\} (4)$$

ゆえに無限遠方で全ての応力及び変位が消失し以下の境界条件

$$z = -a \text{ において } \sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0. \quad (5)$$

$$\alpha = \alpha_0 \text{ において } \left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= pc^2 g_0^2 \bar{\eta}^2 (\bar{\xi}^2 + 1), \\ \tau_{\alpha\beta} &= -pc^2 g_0^2 \bar{\xi} \bar{\eta} \bar{\xi} \bar{\eta}. \end{aligned} \right\} (6)$$

を満足する解と式(3)の解を連立合わせれば扁平回転だ円空孔を有する半無限体の表面に一様圧縮 p を受ける場合の解が得られる。次に調和関数として次のものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= p \int_0^\infty \phi(\lambda) J_0(r\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda, \Psi = p \int_0^\infty \lambda \psi(\lambda) J_0(r\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda, \\ \Phi &= p \sum_{n=0}^\infty A_n g_n(r) P_n(\eta), \Psi = p \sum_{n=0}^\infty B_n g_n(r) P_n(\eta). \end{aligned} \right\} (7)$$

ここに $J_0(x)$ は第1種円柱函数, $g_n(z) = e^{\frac{z}{2}(n+1)i} Q_n(z)$ は第2種 Legendre 函数, $P_n(z)$ は第1種 Legendre 函数である。

3. 解析方法

境界条件式 (5), (6) について考える。まず扁平回転円体調和函数を次式を用いて円柱調和函数により表わす。

$$g_n(z) P_n(z) = (-1)^n \sqrt{\pi c/2} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(ct) J_0(rt) e^{zt} dt, (z < 0) \quad (8)$$

式(7)より得られる応力を重ね合わせ、式(5)より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{\pi c/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha t} J_{n+\frac{1}{2}}(ct) \\ &\quad \times [t(3-4\nu-2\alpha t) A_n + \{4(1-2\nu)X\nu-1+2\alpha^2 t^2\} B_n], \\ \psi(t) &= \sqrt{\pi c/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{-\frac{3}{2}} e^{-2\alpha t} J_{n+\frac{1}{2}}(ct) \\ &\quad \times [-2t A_n + (3-4\nu+2\alpha t) B_n]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

次に円柱調和函数を次式を用いて扁平回転円体調和函数で表わす。

$$J_0(rt) e^{-zt} = \sqrt{\frac{\pi}{2ct}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) J_{l+\frac{1}{2}}(ct) p_l(z) P_l(r), \quad (10)$$

ここに $p_l(z) = e^{-\frac{1}{2}zl} P_l(z)$ である。

式(7)より得られる応力を重ね合わせ、式(9)を用いると境界条件式(6)は A_n, B_n の無限連立一次方程式として未定係数 A_n, B_n が決まり、境界条件式(5), (6)を満足する解が得られたことになる。この解と式(3)から求められる解を重ね合わせれば問題は解決されたことになる。

4. 計算結果

ポアソン比 $\nu = 0.3$, $b/d = 3.0$, $c = 1.0$ に固定し、半無限体表面からの距離 a を変化した場合の空孔面における σ_β の分布を図2に示す。 a が小さいほど、つまり空孔が半無限体の表面に近づくほど、 $\beta = 90^\circ$ における応力 σ_β の最大値は大きくなる。また $\beta = 180^\circ$ においては引張り応力が大きくなる傾向を示している。図2の $a = \infty$ は無限体中に空孔がある場合を示して

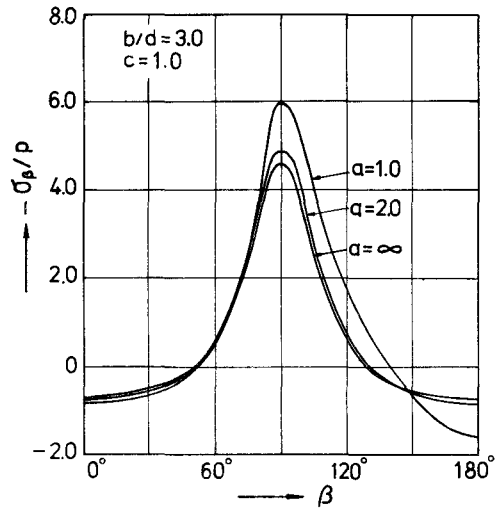


図2. 扁平回転円体空孔面における σ_β の分布
より、 $\beta = 90^\circ$ における σ_β について表面からの距離 a のときの値 $(\sigma_\beta)_a$ とすれば、図2の場合、次のようになる。

a	2.0	3.0	4.0
$(\sigma_\beta)_a / (\sigma_\beta)_\infty$	1.07	1.02	1.01

さらに b/d を変化した場合も上の表とほぼ同様のことがいえる。即ち半無限体表面に接近している場合に空孔周辺の応力分布に影響が大きくなり、離れるに従いその影響はすみやかに小さくなると思われる。

5. あとがき

今後ここで述べた解析方法をもとにして弾性体中にあるき裂と空孔の問題について考察を進めてゆきたいと思う。

6. 参考文献

- 1) Edwards, R.H.: Stress Concentrations around aspherical inclusions and cavity, J. Appl. Mech., 18, 1, p. 19, 1951.
- 2) 土田, 内山: へん長回転円体状空孔を有する円柱の引張り, 機論, 44-384, p. 2577, (昭53-8).
- 3) 土田, 内山: へん平回転円体状空孔あるいは円形き裂を有する円柱の引張り, 機論, 780-12, (昭53-10).
- 4) Cooke, J.C.: Monatshefte für Math., 60, p. 322, 1956.