Schwarz-Christoffel 変換によるき裂問題の1解法

東北大学工学部　正員　湯沢　昭

1. まえがき

多角形の孔のある無限板を、単位円の内部に等角写像する関数は、Schwarz-Christoffel 変換を用いて容易に見つけることが出来る。今回、このSchwarz-Christoffel 変換を用い、無限板中の多角形の孔から発生したき裂の問題を考えてみる。この場合の問題点は、物理平面（Z-plane）の多角形の頂点とそれに対応する単位円（ζ-plane）上の点の決定にある。これは、対応点を決定する際の積分が一般に複素積分となるため、その解法が困難となる。この解決策として、Z平面の境界を上半無限板（ω-plane）の実軸上に写像し、ω平面から一次変換によりζ平面の境界に写像しようとするものである。例として、四角形の頂点から発生する、直線き裂と屈折き裂に関して解析を行なった。なお、数値計算は東北大学大型計算機センターのライブラリープログラムを使用した。

2. 等角写像関数の決定

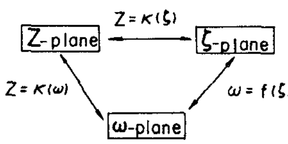

Fig. 1

Z平面，ω平面，ζ平面の関係は、Fig.1，Fig.2 のようになる。まずZ平面からω平面への等角写像は、Schwarz-Christoffel 変換により

$$Z = \kappa(\omega) = A' \int \prod_{j=1}^{n-1} (\omega - k_j)^{\alpha_j - 1} \frac{d\omega}{(\omega^2+1)^2} \quad \text{----------}(2.1)$$

ただし $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n+2$，　A'：形状係数

また、ω平面からζ平面への一次変換は

$$\omega = f(\zeta) = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \quad \text{ただし } \zeta = \rho e^{i\theta},\ \rho \le 1 \quad \text{----------}(2.2)$$

従って、Z平面からζ平面への写像は、(2.2)式を(2.1)式に代入し整理すると

$$Z = \kappa(\zeta) = A \int \prod_{j=1}^{n} (1 - e^{-i\theta_j}\zeta)^{\alpha_j - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \quad \text{----------}(2.3)$$

ただし $e^{-i\theta_n} = 1$，　$e^{i\theta_\ell} = -1$

$$A = \frac{i}{8} A' \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{-2ie^{i\theta_j}}{1-e^{i\theta_j}} \right)^{\alpha_j - 1}, \quad e^{i\theta_j} = \frac{k_j - i}{k_j + i}$$

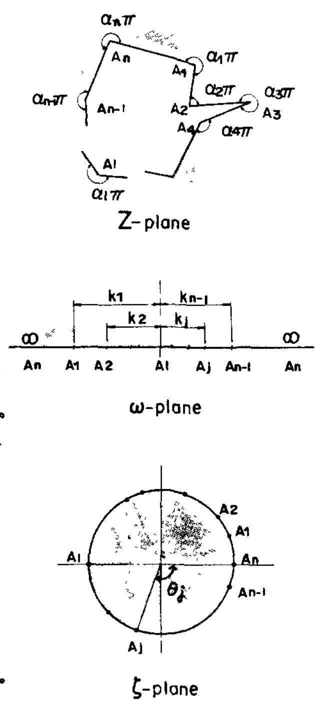

Fig 2

次に(2.1)式のk_jの決定について考えてみる。Z平面の頂点A_nをω平面の実軸上の無限遠点，A_ℓを原点に対応させると残りの点はFig.2のようになる。よって、未知定数はk_jが$(n-2)$個と形状係数A'の計$(n-1)$個となる。境界条件として、Z平面の辺の長さがわかっているので、実際に(2.1)式をω平面の実軸上で積分（2.4式参照）すると$(n-2)$個の方程式を得る。

$$Z_m = A' \int_{k_m}^{k_{m+1}} \prod_{j=1}^{n-1} (\omega - k_j)^{\alpha_j - 1} \frac{d\omega}{(\omega^2+1)^2} \quad \text{----------}(2.4)$$

ただし　$1 \le m \le (n-2)$

次に(2.3)式の積分項の一部を、二項級数に展開すると、次のようになる。

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - e^{-i\theta_j}\zeta)^{\alpha_j - 1} = \sum_{0}^{\infty} \beta_n \zeta^n \quad \text{---------}(2.5)$$

(2.5)式を(2.3)式に代入すると

$$z=x(\zeta)=A\int\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\zeta^n\frac{d\zeta}{\zeta^2}=A\int\left(\frac{\beta_0}{\zeta^2}+\frac{\beta_1}{\zeta}+\beta_2+\beta_3\zeta+\cdots\cdots\right)d\zeta \qquad \text{--------(2.6)}$$

ここで、(2.6)式の被積分関数を $\zeta=0$ の近傍で展開した時、ζ^{-1}を含む項が零になるとすると、

$$\beta_1=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)e^{-i\theta_j}=0 \qquad \text{----------------(2.7)}$$

となり、(2.7)式は変数変換すると、次のようになる。

$$\alpha_n-\alpha_\ell+\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)\frac{k_j+i}{k_j-i}=0 \quad \text{ただし}(j\neq\ell) \qquad \text{--------------(2.8)}$$

従って、(2.4)式の(n-2)個の方程式と(2.8)式、合計(n-1)個の方程式より $k_1,k_2,\cdots k_{n-1},A'$ ($k_\ell=0$) を決定する。この場合、(2.4)式は、おのおの数値積分を行ない、関数の極小化により、未知定数を決定した。

k_j, A'が求まると(2.3)式より $e^{i\theta_j}$, Aが決定される。最終的に(2.6)式の右辺を積分すると

$$z=x(\zeta)=\frac{C}{\zeta}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^n \qquad \text{----------------(2.9)}$$

となり、Z平面の領域を単位円の内部に写像する等角写像関数が得られた。

3. 計算例

Fig.3は、正方形の孔の2項点から45°方向へき裂が生じた場合の、き裂長 Z_2 の変化に対する、k_j, A'の変化の図である。Z_2が零に近づくと(き裂のない場合)、明らかに、k_1, k_2, k_3は一点に収束($k_1=0.4142$)する。

Fig.4は、Fig 3のZ平面の領域が、無限遠点で $\sigma_x^\infty=1.0$ の引張り力が作用した場合の自由境界における、応力図である。⊕が引張り応力, ⊖が圧縮応力を示している。

Fig.5は、長方形(横1.5, 縦1.0)の項点から発生した屈折き裂の場合で、Fig.4と同様、無限遠点で引張り力を受けた場合の自由境界における応力図である。

4. 考察

任意の多角形の孔の一部(項点でなくとも良い)から発生するき裂をもつ無限板を、単位円の内部に等角写像する関数を得ることが出来た。Schwarz-Christoffel 変換は、無限板中の孔の問題だけでなく、有限板の多角形の問題も同様に解析出来る。今回は、写像関数をべき級数の形で表現した(2.9式参照)が、級数項を100項まで考えた場合の最大誤差は、1.4%程であった。より正確な写像関数を得るためには、べき級数表現であると高次の項まで考えなければならないので、有理型写像関数の方が良いように思われる。

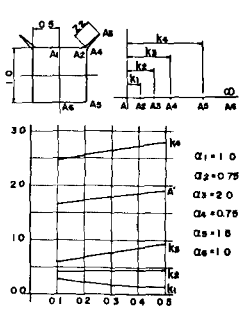

Fig 3

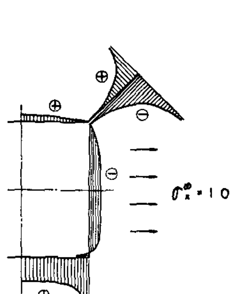

Fig 4

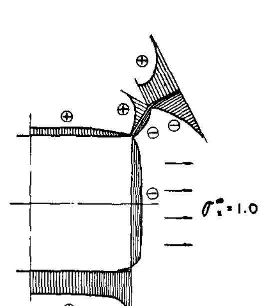

Fig.5

参考文献　石田 誠　"き裂の弾性解析と応力拡大係数"　培風館

スミルノフ　"高等数学教程"⑥　共立出版