

鉄筋コンクリート部材における曲り梁の応力解析

秋田大学 正会員 川上 洵
秋田大学 正会員 徳田 弘
秋田大学 学生会員 水口昌憲

1. まえかき 曲げのみを受けるRC曲線梁に関する応力解析をさしに軸力と曲げを受けるRC曲線梁および異種材料よりなる二層の曲線梁へと発展させその応力解析を行ったものである。

2 曲線部材の歪と応力

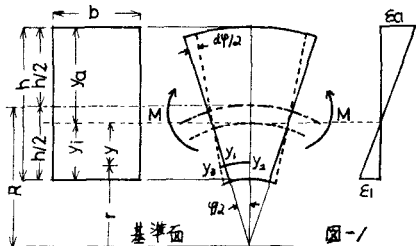


図-1

図1のように曲げを受ける曲線部材の歪応力はそれぞれ式のとおりである。

$$\epsilon = \frac{y_1 \phi}{r} = \frac{y_2 \phi}{r} = \frac{y \phi}{r} \quad \sigma = E \epsilon = E \frac{y \phi}{r} \quad (1)$$

3 正の曲げを受ける鉄筋コンクリート部材

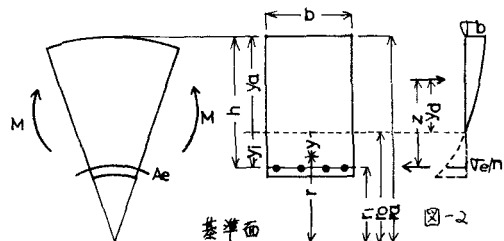


図-2

図2の鉄筋コンクリート部材における歪応力の関係をみると式より部材外端部の応力は、 $\sigma_a = E \epsilon_a = E \frac{y_a \phi}{r}$ によって任意の位置での応力は、 $\sigma = \sigma_a \frac{y}{y_a}$ である。ただしここでyは中立軸の位置より基準面に向う方が正である。また圧縮力は、 $C = \int \sigma dA = \int_0^A \sigma_a \frac{y}{y_a} dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \int_0^A y dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \left[\frac{1}{2} b h^2 - \frac{1}{2} b y_a^2 \right]$ であり力のつり合い $T = C$ より中立軸の位置を定める式を得る。 $\frac{1}{2} b h^2 - \frac{1}{2} b y_a^2 + \frac{1}{2} b y_a^2 = 0$ また内力間距離は圧縮力による中立軸に関するモーメント $M_1 = C \times y_d = \int \sigma y dA = \int_0^A \sigma_a \frac{y}{y_a} y dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \int_0^A y^2 dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \left[\frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b y_a^3 \right]$ より $y_d = \frac{M_1}{C} = - \frac{\frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b y_a^3}{\frac{1}{2} b h^2 - \frac{1}{2} b y_a^2}$

1. 2)

よって $\sigma = \sigma_a + \sigma_d = \sigma_a - \sigma_d + \sigma_d$ となる。

4 正の曲げを受ける二層部材

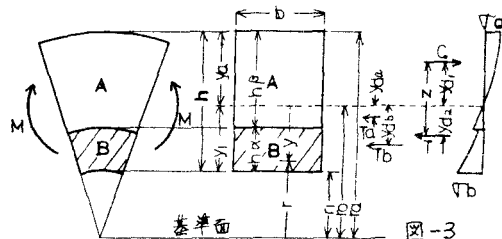


図-3

図3の二層部材における歪応力の関係は式よりB部材の内側端部の応力は、 $\sigma_b = E \epsilon_b = E \frac{y_b \phi}{r}$ またA部材の外端部の応力は、 $\sigma_a = E \epsilon_a = E \frac{y_a \phi}{r}$ であるのでB部材中の任意の位置の応力は、 $(\sigma)_B = \sigma_b \frac{y}{y_b} = m \sigma_a \frac{y}{y_b}$ またA部材中の任意の位置の応力は、 $(\sigma)_A = \sigma_a \frac{y}{y_a}$ である。 $h > y_a$ の時のB部材に働く引張力は、 $T_B = \int \sigma dA = \int_0^A m \sigma_a \frac{y}{y_b} \frac{y}{y_a} dA = m \sigma_a \frac{1}{y_a y_b} \int_0^A y^2 dA = m \sigma_a \frac{1}{y_a y_b} \left[\frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b y_a^3 \right]$ またA部材に働く引張力は、 $T_A = \int \sigma dA = \int_0^A \sigma_a \frac{y}{y_a} y dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \int_0^A y^2 dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \left[\frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b y_a^3 \right]$ 一方A部材に働く圧縮力は、 $C = \int \sigma dA = \int_0^A \sigma_a \frac{y}{y_a} y dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \int_0^A y^2 dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \left[\frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b y_a^3 \right]$ であり力のつり合い式 $C = T = T_A + T_B$ より中立軸の位置は、 $y_d = \frac{r(m \sigma_a y_b + \sigma_a y_a)}{\sigma_a (m \frac{h^3 - y_a^3}{3} + \frac{h^3 - y_a^3}{3})} = \frac{r(m y_b + y_a)}{m h^3 - y_a^3}$ (2)

また内力間距離をみるとAB部材に働く引張力の中立軸に関するモーメント $M_2 = T \times y_d = (T_A + T_B) \times y_d$ $= \int \sigma y dA + \int \sigma y dA = \int_0^A m \sigma_a \frac{y}{y_b} \frac{y}{y_a} y dA + \int_0^A \sigma_a \frac{y}{y_a} y dA = m \sigma_a \frac{1}{y_a y_b} \left[\frac{1}{4} b h^4 - \frac{1}{4} b y_a^4 \right] + \sigma_a \frac{1}{y_a} \left[\frac{1}{4} b h^4 - \frac{1}{4} b y_a^4 \right]$ であり、また $y_d = M_2 / T$ であるから、 $y_d = \frac{\frac{1}{4} b h^4 - \frac{1}{4} b y_a^4}{\frac{1}{2} b h^3 - \frac{1}{2} b y_a^3} = \frac{h^4 - y_a^4}{h^3 - y_a^3}$

またA部材に働く圧縮力によるモーメントは、 $M_1 = C \times y_d = \int \sigma y dA = \int_0^A \sigma_a \frac{y}{y_a} y dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \int_0^A y^2 dA = \sigma_a \frac{1}{y_a} \left[\frac{1}{3} b h^3 - \frac{1}{3} b y_a^3 \right]$

$$= \sigma_a \frac{r_a}{y_a} \left[r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - 2r_0 y_a + \frac{r_0^2 - r_i^2}{2} \right] \text{であるから、}$$

$$y_{d1} = \frac{M_1}{C} = - \frac{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - 2r_0 y_a + \frac{r_0^2 - r_i^2}{2}}{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - y_a}$$

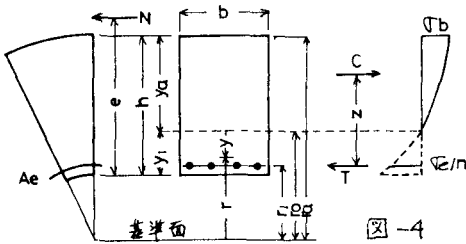
従って、 $z = y_{d1} + y_{d2}$ となる。また $R > y_a$ の時の中立軸の位置は式(2)と同じ結果である。また内力間距離は

$$y_{d2} = \frac{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - 2r_0 y_i + \frac{r_0^2 - r_i^2}{2}}{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - y_i}$$

$$y_{d1} = \frac{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - 2r_0 y_a + \frac{r_0^2 - r_i^2}{2} + m \left[r_0 \ln \frac{r_0}{r_0} - 2r_0 (y_a + R\beta) + \frac{(r_0 - R\beta)^2 - r_i^2}{2} \right]}{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - R\beta + m \left[r_0 \ln \frac{r_0}{r_0} - y_a + R\beta \right]}$$

従って $z = y_{d1} + y_{d2}$ となる。

5. 偏心の大きい軸力を受ける鉄筋コンクリート部材



歪および応力の関係は曲げモーメントが働いた場合と同じである。 N の作用点を基準にしたモーメントのつり合い式より $0 = \int \sigma(e-r) - \sigma_c A_c(e-r_0)$

$$0 = \int_{r_0}^r \sigma_a \frac{r_0}{y_a} b \frac{(r-r_0)}{r} (e-r) dr - \sigma_c A_c(e-r_0) - \frac{y_a}{3} + e y_a - r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - m \frac{y_i A_s (e-r_0)}{y_a b} = 0 \quad (3)$$

従って式(3)より中立軸の位置を求めることができる。

また基準面を基準にしたモーメントのつり合い式より

$$0 = \int \sigma r dA - \sigma_c A_c e r_0 - N e = \int_{r_0}^r \sigma_a \frac{r_0}{y_a} b \frac{(r-r_0)}{r} r dr + \sigma_c A_c e r_0 - N e$$

$$\therefore \sigma_a = \frac{N e}{b r_a \left[\frac{y_a}{3} - m \frac{y_i A_s}{y_a b} \right]} \quad (4)$$

従って式(4)により応力を求めることができる。また図4の力のつり合いおよびモーメントのつり合いより、

$$C = N + \sigma_c A_c, \quad M = N(e-r_0) = C \times z$$

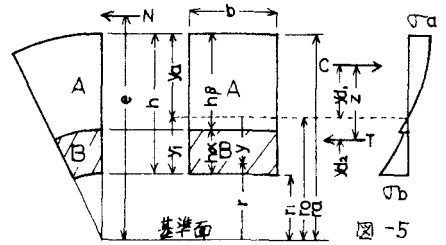
$$\therefore \frac{M}{N} = e - r_0 = \frac{z}{1 - m \frac{y_i A_s}{r_0 y_a b} \times \left[1 - \frac{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i}}{y_a} \right]} \quad (5)$$

従って式(5)より直線ばりにおけるメルシュの図表に対応する曲り梁の図表を得ることができる。

6. 偏心の大きい軸力を受ける二層部材

歪および応力は曲げモーメントが働いた時と同じである。図5より軸力の作用点を基準にしたモーメントのつり合いより中立軸の位置を求める。 $R > y_a$ の時

$$\int \sigma(e-r) dA - \int \sigma(e-r) dA - \int \sigma(e-r) dA = 0$$



$$\int_{r_0}^r \sigma_a \frac{r_0}{y_a} b \frac{(r-r_0)}{r} (e-r) dr - \int_{r_0}^r \sigma_a \frac{r_0}{y_a} b \frac{(r-r_0)}{r} (e-r) dr - \int_{r_0}^r m \sigma_s \frac{r_0}{y_s} b \frac{(r-r_0)}{r} (e-r) dr$$

$$\therefore r_0 = \frac{e r (m \alpha + \beta) - [r_0 R \beta^2 (m-1) + r_0^2 - m r_i^2] / 2}{e \left[\ln \frac{r_0}{r_0 - R\beta} + m \ln \frac{r_0}{r_i} \right] - r_0 R (m \alpha + \beta)} \quad (6)$$

従って式(6)より $y_i = r_0 - r_i$ により中立軸の位置を求める。また基準面を基準にしたモーメントのつり合いより $\int \sigma r dA - \int \sigma r dA - \int \sigma r dA - N e = 0$

$$\int_{r_0}^r \sigma_a \frac{r_0}{y_a} b \frac{(r-r_0)}{r} r dr - \int_{r_0}^r \sigma_a \frac{r_0}{y_a} b \frac{(r-r_0)}{r} r dr - \int_{r_0}^r m \sigma_s \frac{r_0}{y_s} b \frac{(r-r_0)}{r} r dr = 0$$

$$\therefore \sigma_a = \frac{-N e}{\frac{r_0}{y_a} b \left[\ln \frac{r_0}{r_0 - R\beta} - \frac{r_0^2 - (r_0 - R\beta)^2}{2} + m \ln \frac{r_0}{r_i} - \frac{(r_0 - R\beta)^2 - r_i^2}{2} \right]} \quad (7)$$

従って応力が式(7)より求めることができる。また力のつり合いおよびモーメントのつり合い

$$C = N + T, \quad M = N(e - y_{d2}) = C \times z \text{ より}$$

$$e = \frac{C \times z}{C - T} + y_{d2} = \frac{r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - y_a}{r_0 \ln \frac{r_0}{r_0 - R\beta} - R\beta + m \left[r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - R\beta - y_a \right]} \times z + y_{d2}$$

従って二層部材におけるメルシュの図表を求めることができる。同様に $R < y_a$ の時は中立軸の位置、応力の算定の式は式(6)、式(7)と同じ式となりメルシュの図表を得るための式は次のようになる。

$$e = \frac{r_0 \ln \frac{r_0}{r_0 - R\beta} - R\beta + m \left[r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - R\beta - y_a \right]}{r_0 \ln \frac{r_0}{r_0 - R\beta} - R\beta + m \left[r_0 \ln \frac{r_0}{r_i} - R\beta \right]} \times z + y_{d2}$$

7. あとがき

それぞれ誘導した式に関し曲率半径を無限大にするると直線梁の場合の式と一致する。また計算図表は紙上の都合で省略し当日発表の予定である。なお図表の作製については北海道大学大型計算機を利用した。

参考文献

1. Boris Topaloff, "Berechnung des gekrümmten Stahlbetonbalkens" Beton- und Stahlbetonbau 1960
2. R.H. Dawoud et al, "Flexural Stresses in Rectangular Reinforced Concrete Curved members" ACI Journal vol 67, No 3 1970