

湾内津波の変形

東北大学 正員 ○真野 明
東北大学 正員 岩崎敏夫

1. はじめに 近年、プレート理論による海底地震発生の機構せ、数値シミュレーションによる発生津波の研究が進むに従って外海における津波波形がかなり詳しくわかる様になった。それによると発生津波の主要部分は最初の1~2波に限られ、比較的短い継続時間をもった遷移波であることがわかる。一方これら津波に対する港湾振動の問題は、現在までの所正弦波を使った波高増中率の研究せ、統計的に定常な入力波に対するスペクトル解析の研究があるが、このままでは、上述の様な津波入力に対する湾内の液形せ最大水位といった問題を研究するのには不十分である。本論文は線型システムの理論を使って湾内津波の挙動を明らかにしようとするものである。

2. 線型システム論 フーリエ解析を使った線型システム論はPapoulis等によって詳しく述べられているがここでは矩形パルスによる変調を行なって上述の目的を遂げることとする。今線型システムLの入出力関数を、 $f(t), g(t)$ としてそれらのフーリエ変換を各々 $\tilde{f}(\omega), \tilde{g}(\omega)$ とする。又インパルス入力 $\delta(t)$ に対する出力をインパルス応答として $f(t)$ であらわすと(1)~(3)の関係がある。

$$g(t) = L[f(t)] \dots (1) \quad f(t) = L[\delta(t)] \dots (2) \quad H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{i\omega t} dt \quad (3) \quad L[e^{i\omega t}] = H(\omega) e^{i\omega t} \quad (4)$$

システム関数 $H(\omega)$ は(3)で定義されるが、単振動入力関数 $e^{i\omega t}$ は線型システムの固有関数であるので(4)で定義することも出来る。周波数領域では(5)の関係がある。 $\tilde{g}(\omega) = H(\omega) \tilde{f}(\omega) \quad (5)$

次に入力波の継続時間を $2T$ とすると、この間でフーリエ級数に分解出来、 $f(t)$ は(6)式の様にあらわされ、正弦波の矩形パルス変調波の合成液になっていることがわかる。(5)式と、線型性の性質を使って出力液は(7)式であらわされる

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2T} A(\omega) \left[\frac{\sin(\omega - \omega_n)T}{\omega - \omega_n} \sin(\phi(\omega) - (\omega - \omega_n)T) - \frac{\sin(\omega + \omega_n)T}{\omega + \omega_n} \sin(\phi(\omega) - (\omega + \omega_n)T) \right] \cos \omega t d\omega \quad (7)$$

$$\text{ここで } \omega_n = n\pi/4T \dots (8) \quad H(\omega) = A(\omega) e^{i\phi(\omega)} \dots (9)$$

(7)式によってシステム関数の絶対値 $A(\omega)$ と、位相部分 $\phi(\omega)$ がわかっていれば、有限長さの任意の入力液形に対する出力液形を計算出来る。

3. 港湾のシステム関数 ここでは港湾及び外海を水路の様に考文1次元線型長波の理論より、時間因子を $e^{i\omega t}$ とすると水面変位 $\eta(x, t)$ は、

$$\eta(x, t) = \eta(x) e^{i\omega t} \dots (10) \quad \frac{d}{dx} (b \cdot h \frac{d\eta(x)}{dx}) + \frac{b\omega^2}{g} \eta(x) = 0 \quad (11)$$

ここに b, h は各々水路水深及び水路巾である。 b, h に(12)式を仮定すると

$$(11)の一般解は本間博士により(13)に与えられる。 $h(x) = cx^m, b(x) = dx^n \quad (12) \quad \eta_1(x) = x^{p\theta} [A_1 H_0^{(1)}(\kappa x) + B_1 H_0^{(2)}(\kappa x)] \dots (13) \quad p = 1 - m/2, \theta = (1 - m - n)/(2 - m), (m \neq 2) \quad (14)$$$

$\kappa(x) = \omega/p\sqrt{gh}, \quad k = \omega/\sqrt{gh} \dots (15)$ 。また外海(領域2)を一樣水路とすると一般解は(16)となる。

$$\eta_2(x) = [A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}] \dots (16), \text{ここで } \eta_2^+(x) = A_2 e^{ik_2 x} \text{が入射液をあらわしている。}$$

これを $x = \ell$ で完全反射、 $x = l$ (湾口)で水位と流量の連続の境界条件で解くと

$$\eta_1(x) = \frac{2A_2 e^{ik_2 \ell} (\kappa/\theta)^{\theta} \Delta_1(x)}{\Delta_1(\ell) - i\theta \Delta_2(\ell)} \dots (17) \quad \gamma = \frac{b_1(\ell) \sqrt{h_1(\ell)}}{b_2(\ell) \sqrt{h_2(\ell)}} \dots (18)$$

$$\Delta_1(x) = J_{\theta-1}(\kappa(x) \cdot \epsilon) Y_{\theta}(\kappa x) - Y_{\theta-1}(\kappa(x) \cdot \epsilon) J_{\theta}(\kappa x) \dots (19) \quad \Delta_2(x) = J_{\theta-1}(\kappa(x) \cdot \epsilon) Y_{\theta-1}(\kappa x) - Y_{\theta-1}(\kappa(x) \cdot \epsilon) J_{\theta-1}(\kappa x) \quad (20)$$

ここで(4)式に従い、 $x = l$ の入射液 $\eta_2^+(l)$ に対する湾内任意の点 x での出力液の関係を示すシステム関数を

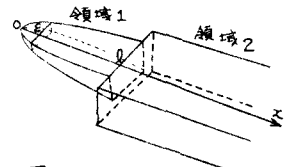


図-1 港湾モデル

(21)式で定義する。特に $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると(22)式となり、さらに $x \rightarrow 0$ とすると(23)式となる。

$$H_\varepsilon(\omega, x) = \eta_1(x)/\eta_2^+(x) = 2\Delta_1(x)(\alpha/l)^{2\delta} / [\Delta_1(l) - i\delta\Delta_2(l)] \quad (21)$$

$$H_0(\omega, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(\omega, x) = 2(\alpha/l)^{2\delta} J_{-\delta}(\kappa x) / [J_{-\delta}(\kappa l) + i\delta J_{1-\delta}(\kappa l)] \quad (22)$$

$$H_0(\omega; 0) = 2 / [(\frac{\kappa l}{2})^{2\delta} \Gamma(1-\delta) (J_{-\delta}(\kappa l) + i\delta J_{1-\delta}(\kappa l))] \quad (23)$$

(23)式において $m=0, n=0$ とすると矩形湾のシステム関数となる。

$$H_0(\omega; 0) = 2 / [\cos(\kappa l) + i\delta \sin(\kappa l)] \quad (24)$$

さらに(23)式で $m=1, n=0, \delta=1$ とすると Keller and Keller の結果と一致する。

4. 計算例 図-2 に(23)式の $m=1, n=0$ の場合について、 $\delta=1.0, 0.7, 0.5, 0.3, 0.2$ と変えて、システム関数の絶対値(波高増巾率)と位相部分を示した。横軸及び位相は各々 $\kappa(\omega l)$ 、 ϕ を π で割って正規化してある。 δ が小さくなるほど、また高周波数側になるほど波高増巾率は増大するが、これは1次元長波理論における問題点である。図-3は、(23)式の $\delta=0.5, n=0$ の場合について $m=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ と変えてシステム関数を示した。 m が大きくなると波高増巾率は増大し、共振点は高周波側にずれる。

次に出力波の計算を示す。矩形湾のシステム関数(24)の場合は(3)の逆変換により解析的にインパルス応答関数 $h(t)$ を求めることが出来、入力波との重畳積分により出力波形が求まるので、(7)式の数値積分誤差のチェックを行なうことが出来る。(24)式は周期 $2\pi/\tau_1$ (ここで $\tau_1 = \frac{l}{\sqrt{gH_1}}$)の周期関数であるので、(3)の逆変換はパルス列であらわされる。

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta(t - n\tau_1) \quad (25)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\tau_1}}^{\frac{\pi}{\tau_1}} \frac{2e^{in\tau_1\pi}}{\cos(\tau_1\omega) + i\delta \sin(\tau_1\omega)} d\omega = \begin{cases} 0 & (n \leq 0, \text{又は } n=2m, m=1,2,3) \\ \left(\frac{4}{1+\delta}\right) \left(\frac{\delta-1}{\delta+1}\right)^{m-1} & (n=2m-1, m=1,2,3) \end{cases}$$

入力波を $f(t)$ とすると出力波 $g(t)$ は(26)で表わされる。

$$g(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{1+\delta}\right) \left(\frac{\delta-1}{\delta+1}\right)^{m-1} \cdot f(t - (2m-1)\tau_1) \quad (26)$$

図-4に、(7)式において $b_1=b_2=b_3=1, b_n=0 (n>3)$ の場合の計算結果を示す。点線が入射波形、実線(S_1)が、(7)式によって求めた出力波形、一点鎖線(S_2)が(26)式によって求めた出力波形、 $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ は各々 b_1, b_2, b_3 に対応するフーリエ級数の成分波であり、一番下の η が、上の3つの波形を合成したものである。(7)式で求めた波形は一割程度の誤差があり、数値積分の精度をあげることが必要である。

参考文献

- Papoulis, A : The Fourier Integral and Its Applications
 本間 仁 : 長波の変形に就て, 土木学会誌, 第19巻, 1933.
 Keller, J.B. and H.B. Keller : Water Wave Run-up on a beach, 1964.

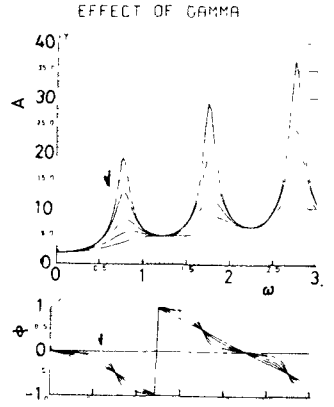


図-2 $m=10, n=0$ のシステム関数
矢印上から順に $\delta=0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$

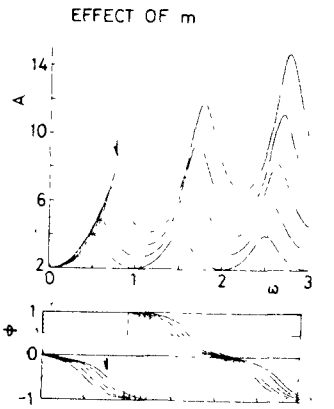


図-3 $n=0, \delta=0.5$ のシステム関数
矢印上から順に $m=1.0, 0.75, 0.5, 0.25, 0$

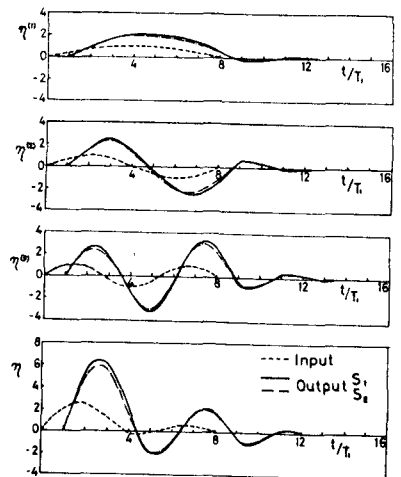


図-4 矩形湾($\delta=0.707$)の出力波形