

# 洗掘を考慮した河川水の浮遊濃度の数値計算

東北大学工学部 学生員・小暮 和史  
大学院 学生員 大杉 勉  
工学部 正 員 首藤 伸夫

## 1. まえがき

河床にヘドロが堆積している場合および北上川上流のように中和生成物が堆積している場合の小粒子物質の浮遊問題を考えることとする。ヘドロなどは流れによって洗掘、浮上、流送、堆積といった現象を繰り返しているが、この現象は環境保全の面から近年、特に関心を持にれている。このような河川の濃度分布の数値計算を行なうにあたって、洗掘を計算上に表現する方法について考察し、一応の結果を得たのでここに報告する。

## 2. 基礎式、流速分布および拡散係数

基礎式として次の定常二次元拡散方程式を用い、座標系は流下方向に $x$ 軸、鉛直下向きに $z$ 軸をとる。

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( E_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - w \frac{\partial C}{\partial z} \quad (1)$$

$u$  主流方向の流速       $C$  濃度  
 $E_z$  鉛直方向の拡散係数       $w$  粒子沈降速度

境界条件は図-1に示すように与える。ここで、底面境界条件中の $\delta_s$ は、単位面積・単位時間当りの洗掘量( $\theta/m^2 \cdot sec$ )として与え、平衡状態においては、 $\delta_s = 1$ ,  $\delta_s = 0$ 、洗掘傾向のところでは、 $\delta_s = 1$ ,  $\delta_s > 0$ 、堆積傾向のところでは、 $0 < \delta_s < 1$ ,  $\delta_s = 0$ とする。

流速の鉛直分布は粗面内数則により与え、拡散係数 $E_z$ は渦動粘性係数に比例するものとして次式( $\beta = 1, 2$ )で与える。

$$E_z = \beta k u_* z (1 - z/H) \quad (2) \quad k: \text{カルマン定数} \quad u_*: \text{底面摩擦速度} \quad H: \text{水深}$$

## 3. 数値計算の方法

数値計算は陽形式の差分法により $x(i)$ 方向に対して前進差分、 $z(j)$ 方向に対して中央差分をとれば

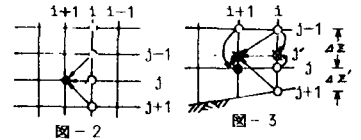
$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta x} \quad (3) \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta z} \quad (4) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (5)$$

### 1) 水中の差分計算式

基礎式(1)に式(3),(4),(5)を代入すると

$$C_{i+1,j} = (-F+G) \cdot C_{i,j+1} + (1-2G) C_{i,j} + (F+G) \cdot C_{i,j-1} \quad (6)$$

$$F = \frac{\Delta x}{2u\Delta z} \left( w - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad G = \frac{\Delta x}{u(\Delta z)^2} E_z \quad (7)$$



となり、図-2のように、各格子点の濃度を求める。また水底においては鉛直方向の格子間距離が不規則となり、式(6),(7)をそのまま用いることができない。そこで図-3のように $C_{i,j+1} \sim C_{i,j}$ の濃度を直線近似して、 $C_{i,j}$ を求め、 $C_{i,j+1}$ ,  $C_{i,j-1}$ との間に式(6)と同様に次式が成立する。

$$C_{i+1,j} = (-F+G) \cdot C_{i,j+1} + (1-2G) C_{i,j} + (F+G) \cdot C_{i,j-1} \quad (8)$$

$$F = \frac{\Delta x}{2u(\frac{\Delta z}{2} + \Delta z')} \left( w - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad G = \frac{\Delta x}{u(\frac{\Delta z}{2} + \Delta z')^2} E_z \quad (9)$$

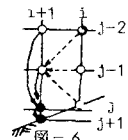
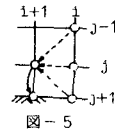
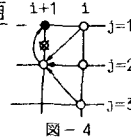
ここで再び $C_{i+1,j+1} \sim C_{i+1,j}$ の濃度を直線近似すると次式により $C_{i+1,j}$ を求めることができる。

$$C_{i+1,j} = \frac{2 \cdot \Delta z'}{\Delta z + \Delta z'} \cdot C_{i+1,j+1} - \frac{2(\Delta z - \Delta z')}{\Delta z + \Delta z'} \cdot C_{i+1,j-1} \quad (10)$$

## 2) 水面および底面の差分計算式

水面の境界条件式に図-4のように、 $C_{i+1,2} \sim C_{i+1,1}$ の濃度を直線近似して、その中点に対して式(4)を適用すると、

$$\epsilon_z \frac{C_{i+1,2} - C_{i+1,1}}{\Delta Z} - W \frac{C_{i+1,2} + C_{i+1,1}}{2} = 0 \quad \text{---(11)}$$



$$C_{i+1,1} = \frac{2 \cdot \epsilon_z - W \Delta Z}{2 \cdot \epsilon_z + W \Delta Z} C_{i+1,2} \quad \text{---(12)}$$

同様に底面の境界条件に図-5のように濃度を直線近似して、中点に対して式(4)を適用すると、

$$C_{i+1,j+1} = \frac{2 \epsilon_z + k W \Delta Z'}{2 \epsilon_z - k W \Delta Z'} \cdot C_{i+1,j} + \frac{2 g_s \Delta Z'}{2 \epsilon_z - k W \Delta Z'} \quad \text{---(13)}$$

また図-6のような場合には、 $C_{i+1,j+2}$ ,  $C_{i+1,j+1}$ ,  $C_{i+1,j}$ の間に  $\epsilon_z (\partial C / \partial Z) - W C = 0$  を仮定して、

$$C_{i+1,j} = \frac{2 W \Delta Z}{\epsilon_z} \cdot C_{i+1,j+1} + C_{i+1,j+2} \quad \text{---(14)}$$

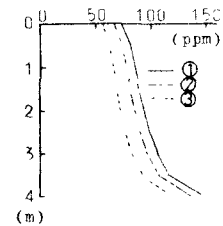
から得られる  $C_{i+1,j}$  を用いて、同様に式(13)により、底面濃度  $C_{i+1,j+1}$  を決める。

## 3) 差分計算の安定条件

von Neumann の方法によると  $\frac{2 \epsilon_z \Delta x}{U (\Delta Z)^2} \leq 1 \quad (15) \quad \epsilon_z \geq \frac{1}{2 U} \left( W - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial Z} \right)^2 \Delta x \quad (16)$

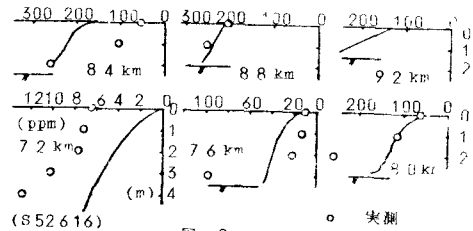
## 4. 仮想モデルによる計算

以上に述べた方法で洗掘を計算上に表現するときの問題点を検討するため長さ 1000 m、幅は一定で 50 m、水深は 3 m から 4 m になめらかに増加するモデルを想定し、200 m ごとの濃度鉛直分布を求めた。鉛直分布より濁質量を求め、初期濃度と洗掘量より算定される値との比較を試みた。まず  $\Delta Z$  を 0.5 m で計算すると鉛直分布より求めた濁質量が後者の値よりかなり大きかった。そこで前者を後者に近づけようという試みに結果、 $\Delta Z$  を水面からききむ (図-7の①) より底面からききむ (同②) 方が良かったとわかった。しかしまだ大きいので 200 m ごとに超過分だけ濃度を補正すると両者はほとんど一致し (同③) 濁質量の誤差もかなり小さくすることができた。また  $\Delta Z$  を下からききみ、0.2 m くらいに小さくすると補正なくても濁質量の誤差はかなり小さく、濃度分布は図-7の③とほとんど一致する。



## 5. 実測値との比較

四十四田ダム貯水池の制限水位移行期の実測を用いて、堤下より 9.2 km の地点で初期濃度を与えて 2 km ほど計算した結果と実測値を比較したのが図-8である。ここで洗掘があると思われるのは最初の 0.4 km であり、それは実測値の濃度分布から算定してこの区間で一定として与え、 $\Delta Z$  は 0.2 m で底面から一定にききだんだ。7.2 km でかなり値が異なるのは、計算で沈降速度はフロックの成長を考慮して変化させており、計算上、7.2 km 付近では大きくなり過ぎによるのである。しかし、全体的には割と良い結果が得られると思う。



## 6. 結 語

濃度の数値計算で洗掘を計算上に表現するには、 $\Delta Z$  を底面からききみ小さくするが、あるいは河原ガの方法で濃度を補正することが必要であり、そうすることにより、ある程度までは表現しうらと思う。

<参考文献> 三王・岩崎 他：貯水池における凝集性懸濁物質の挙動 第22回 水理講演会論文集